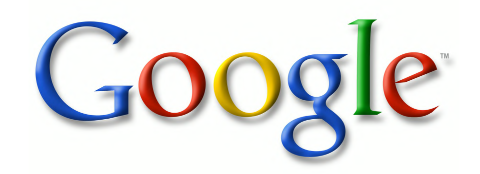



B 492893



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



LEÇONS

SUR LES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

DE

L'ANALYSE

(ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES).

23540 Paris — Imp. Gauthier-Villars et Fils, quai des Grands-Augustins, 55.

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

LEÇONS
SUR LES
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES
DE
L'ANALYSE

(ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES)

PAR

LOUIS RAFFY,
CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1897

PRÉFACE.

Les Leçons que je publie aujourd'hui représentent une partie de l'enseignement que je donne depuis plus de dix ans à la Faculté des Sciences. C'est à l'intention de nos étudiants que je les ai rédigées : pour les candidats au certificat de *Calcul différentiel et Calcul intégral*, elles correspondent à une division importante du programme; les candidats au certificat de *Géométrie supérieure* y trouveront les éléments des diverses théories dont ils doivent étudier quelques-unes en détail.

Mais il m'a paru aussi qu'il y avait intérêt, en dehors des nécessités de tel ou tel examen, à rassembler des vérités qui, dans les cours et dans les livres, sont le plus souvent disséminées, pour en constituer un corps de doctrine, qui fût comme la partie élémentaire de la Géométrie nouvelle qu'ont instituée Monge et Gauss.

L'examen approfondi qu'exigent les principes de cette Science ne pouvant trouver place dans un Ouvrage de la nature de celui-ci, j'ai présenté en quelques pages les généralités indispensables, tant pour donner à mon exposition sa marque et son unité, que pour appeler l'attention sur un sujet important. Certaines des définitions adoptées sont assez particulières, de sorte que souvent nos conclusions subsisteraient, venant après des hypothèses moins restrictives; mais

j'ai voulu n'avoir à invoquer que des propositions d'Analyse bien connues et conduisant à des démonstrations simples.

Si j'ai dû, à cause du but que je m'étais assigné, passer sous silence bien des questions, j'ai tâché d'en préparer l'étude ultérieure, et de ne laisser aucune ombre sur celles que je traitais. Aussi ai-je remplacé maintes fois les solutions classiques par d'autres, qui m'ont paru plus satisfaisantes, et donné la plus grande attention aux questions de signe; enfin, j'ai cherché à écrire clairement et avec correction.

Ce livre, ai-je dit, s'adresse à ceux qui apprennent; mais je serais heureux si ceux qui savent, venant à y jeter les yeux, y trouvaient matière à penser.

LEÇONS

SUR LES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

DE

L'ANALYSE.

CHAPITRE PREMIER.

REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES COURBES ET DES SURFACES.

I. — Courbes planes; point simple.

1. Une *courbe plane* est, par définition, le lieu des points du plan dont les coordonnées cartésiennes (x, y) satisfont à une équation $F(x,y)=0$, la fonction F étant développable par la formule de Taylor aux environs de tout point (x_0, y_0) où elle est nulle, sauf de certains points exceptionnels isolés.

Un point (x_0, y_0) est dit *point simple* d'une courbe $F(x,y)=0$ si, aux environs de ce point, la fonction F est développable par la formule de Taylor et si, de plus, ses dérivées partielles du premier ordre ne sont pas nulles toutes les deux en ce point.

D'après cela, l'une des coordonnées de la courbe est une fonction continue de l'autre aux environs de tout point simple. Soit, en effet, $F'_{y_0} \neq 0$ par exemple. On sait que l'équation

$$(1) \qquad 0 = F(x,y) = (x - x_0)\,F'_{x_0} + (y - y_0)\,F'_{y_0} + \ldots$$

définit, pour toutes les valeurs de x comprises dans un certain intervalle, une fonction y qui, dans tout cet intervalle, est déve-

loppable suivant les puissances entières de $x - x_0$, et qui, pour $x = x_0$, prend la valeur y_0.

Il convient le plus souvent de définir une courbe comme étant le lieu des positions d'un point dont les deux coordonnées cartésiennes sont des fonctions continues d'une variable indépendante u. Ces deux fonctions sont supposées développables par la formule de Taylor aux environs de toute valeur u comprise dans un certain intervalle, sauf de certaines valeurs isolées. On dit alors qu'un point (x_0, y_0) est un *point simple* d'une courbe si les coordonnées de *tout* point de la courbe, situé à l'intérieur d'un cercle décrit de ce point comme centre avec un rayon déterminé, peuvent être représentées par *un seul et même système* de deux fonctions $f_1(u)$, $f_2(u)$ qui, prenant respectivement les valeurs x_0 et y_0 pour $u = u_0$, soient, pour des valeurs suffisamment voisines de u_0, développables en séries entières procédant suivant les puissances de $u - u_0$,

$$(2) \qquad \begin{cases} x = f_1(u) = x_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)^2 + \ldots, \\ y = f_2(u) = y_0 + b_1(u - u_0) + b_2(u - u_0)^2 + \ldots, \end{cases}$$

et telles que leurs dérivées premières ne soient pas nulles toutes les deux pour $u = u_0$.

Ces définitions de la courbe plane et de ses points simples s'accordent avec les définitions précédentes. En effet, considérons une courbe représentée aux environs d'un point (x_0, y_0) par l'équation (1) où l'on suppose $F'_{y_0} \neq 0$. Nous avons vu que l'ordonnée y de cette courbe est développable en une série procédant suivant les puissances de $x - x_0$. Si donc on prend pour x une fonction arbitraire d'une nouvelle variable u, développable suivant les puissances entières de $u - u_0$, telle que la première des séries (2), la fonction y prendra la forme de la seconde des séries (2), et l'on peut évidemment toujours choisir pour x un développement où le coefficient a_1 soit différent de zéro. Ainsi, les définitions qu'exprime l'équation (1) entraînent celles qu'expriment les équations (2).

Réciproquement, du système (2) où nous supposons par exemple $a_1 \neq 0$, on tire pour $u - u_0$ une fonction développable suivant les puissances de $x - x_0$; si l'on substitue cette expression de $u - u_0$ dans la série $f_2(u)$, on obtient pour y une série procédant sui-

vant les puissances entières de $x - x_0$. On a donc une équation de la forme

$$o = F(x, y) = -(y - y_0) + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots,$$

qui rentre visiblement dans le type (1), le coefficient de $y - y_0$ au moins étant différent de zéro. Ainsi, les définitions qu'exprime le système (2) entraînent les premières.

Un point (x_0, y_0) est dit *point multiple* d'ordre n d'une courbe $F(x, y) = 0$ si, aux environs de ce point, la fonction F est développable par la formule de Taylor et si ses dérivées partielles des $n - 1$ premiers ordres sont toutes nulles en ce point, mais non celles de l'ordre n.

Dans ce cas, le développement (1) commence par des termes d'ordre n en $x - x_0$ et $y - y_0$. On sait que, quand il en est ainsi, on peut représenter *tous* les points de la courbe qui avoisinent le point (x_0, y_0) par *un ou plusieurs systèmes* de développements tels que (2), dans chacun desquels les coefficients a_1 et b_1 peuvent être nuls tous les deux, et le sont nécessairement si un seul système de développements suffit.

2. *Remarque*. — On dit que les formules (2) fournissent une *représentation paramétrique* d'une courbe. D'une telle représentation, il est évidemment possible d'en déduire une infinité d'autres. Il suffit, en effet, de remplacer la variable u par une série entière par rapport à une autre variable v, dont les coefficients seront quelconques. On aura ainsi de nouveaux développements

$$(3) \qquad x = \varphi_1(v), \qquad y = \varphi_2(v),$$

analogues aux formules (2).

Mais il arrivera fréquemment que, pour *tout* point (x_0, y_0) de la courbe, les équations (3) admettront plusieurs solutions communes $v = v_1, v_2, \ldots, v_n$. Alors les coordonnées des points voisins de (x_0, y_0) seront représentées par n couples de séries entières procédant respectivement suivant les puissances de $v - v_1$, de $v - v_2, \ldots$, de $v - v_n$; en sorte que tout point simple (x_0, y_0) perdra, en apparence au moins, le caractère d'un point simple. Il est visible en effet que, si les équations (2) n'ont qu'une solution

commune $u = u_0$ pour $x = x_0$, $y = y_0$, et si l'on prend pour u un polynôme entier $P(v)$ du degré n, les n racines $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de l'équation $P(v) = u_0$ seront communes aux équations (3) pour $x = x_0$, $y = y_0$. Lorsqu'à *tout point* d'une courbe correspondent *plusieurs* valeurs du paramètre en fonction duquel ses coordonnées sont exprimées, on dit que l'on a une *représentation impropre* de cette courbe. On réserve le nom de *représentation normale* à celles qui ne font correspondre à chaque point de la courbe (sauf des points isolés bien entendu) *qu'une seule* valeur du paramètre. Il est évident qu'on peut toujours, quand le point (x_0, y_0) est un point simple, obtenir une représentation normale des points qui l'avoisinent par des séries telles que les séries (2), en procédant comme nous l'avons fait pour déduire ces formules de l'équation (1); en particulier, il suffira de prendre pour x une fonction linéaire de u. Mais, même si l'on prend au hasard la fonction $f_1(u)$, ce qui détermine la fonction $f_2(u)$, les équations (2) auront une solution commune quand (x, y) sera un point de la courbe (1), et elles n'en auront généralement pas d'autre. Dorénavant, *toute représentation paramétrique* dont nous ferons usage sera supposée *normale*. Nous étendrons d'ailleurs cette qualification aux représentations paramétriques fournies par des fonctions périodiques, telles que celle du cercle

$$x = R\cos\frac{2\pi u}{\omega}, \qquad y = R\sin\frac{2\pi u}{\omega}.$$

A un point de la courbe correspondent des valeurs en nombre infini du paramètre; mais ces valeurs forment une progression arithmétique ayant pour raison la période ω, en sorte qu'il n'y en a qu'*une* dans un intervalle égal à la période, intervalle où il suffit de faire varier le paramètre u pour obtenir *tous* les points de la courbe. Une pareille représentation est sans inconvénients et peut être traitée de représentation normale.

II. — Courbes de l'espace; point simple.

3. Une *courbe de l'espace* est le lieu des points de l'espace dont les trois coordonnées cartésiennes (x, y, z) sont des fonctions continues d'une variable u; on suppose ces trois fonctions

développables par la formule de Taylor aux environs de toute valeur u comprise dans un certain intervalle, sauf de certaines valeurs isolées. Rien n'empêche d'ailleurs que la courbe ainsi définie ne soit tout entière tracée sur un plan; dans le cas contraire elle est appelée *courbe gauche*.

On dit qu'un point (x_0, y_0, z_0) est un *point simple* d'une courbe si les coordonnées de *tout* point de la courbe situé à l'intérieur d'une sphère, décrite de ce point comme centre avec un rayon déterminé, peuvent être représentées par *un seul et même système* de trois fonctions $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$ qui, prenant respectivement les valeurs x_0, y_0, z_0 pour $u = u_0$, soient, pour des valeurs suffisamment voisines de u_0, développables en séries entières procédant suivant les puissances de $u - u_0$,

$$(4) \quad \begin{cases} x = f_1(u) = x_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)^2 + \ldots, \\ y = f_2(u) = y_0 + b_1(u - u_0) + b_2(u - u_0)^2 + \ldots, \\ z = f_3(u) = z_0 + c_1(u - u_0) + c_2(u - u_0)^2 + \ldots, \end{cases}$$

et telles que leurs dérivées premières ne soient pas nulles toutes les trois pour $u = u_0$.

Si, pour représenter *tous* les points de la courbe voisins de (x_0, y_0, z_0), il faut employer *plusieurs systèmes* de trois développements tels que (4), ou un seul système de cette forme, mais dans lequel a_1, b_1 et c_1 sont nuls tous les trois, le point (x_0, y_0, z_0) est dit *point multiple*.

Voici la raison des diverses hypothèses que nous venons de faire. Sans qu'il soit nécessaire d'avoir défini ce que nous entendrons par le mot *surface*, il est évident qu'une équation telle que (1) ou un système tel que (2), ne contenant que les deux coordonnées x, y, représente tous les points de l'espace qui se projettent sur le plan des xy suivant une certaine courbe (C_z); en d'autres termes, tous les points d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z. Si la section (C_z) de ce cylindre ne présente que des points simples, aucune génératrice n'appartiendra à deux portions différentes du cylindre, tandis que, si deux branches de la section (C_z) se croisent en un point M, la génératrice qui passe en ce point sera commune à deux nappes du cylindre. Cela posé, dans les équations (4) qui définissent une courbe (C) de l'espace, supposons par exemple $c_1 \neq 0$; on sait

qu'alors u est une fonction de z, développable aux environs de z_0 suivant les puissances entières de $z - z_0$. Portons son expression dans les deux premières équations (4); nous obtiendrons deux équations, l'une entre x et z, l'autre entre y et z, savoir

$$x = x_0 + \alpha_1(z - z_0) + \alpha_2(z - z_0)^2 + \ldots,$$
$$y = y_0 + \beta_1(z - z_0) + \beta_2(z - z_0)^2 + \ldots,$$

qui représenteront deux cylindres, l'un parallèle à l'axe des y, l'autre à l'axe des x (*cylindres projetants* de la courbe considérée); les directrices de ces cylindres seront les projections (C_y) et (C_x) de la courbe sur les deux plans $y = 0$ et $x = 0$. Or nous avons supposé expressément que *tous* les points de (C) voisins de $M(x_0, y_0, z_0)$ étaient représentés par le système (4); par suite, tous les points de (C_y) et de (C_x), voisins des projections M_y et M_x de M, sont représentés par les deux équations ci-dessus, en sorte que chacun de ces points est un point simple (nº 1) pour la courbe dont il fait partie. Ainsi, la génératrice de (C_y), qui projette le point M de (C) en M_y, n'appartient qu'à une seule nappe de ce cylindre; il en est de même pour la génératrice de (C_x) qui projette le point M en M_x. Dès lors, on voit que la courbe (C), qui est tracée à la fois sur ces deux cylindres, n'aura qu'une *seule* branche passant par le point M; c'est pourquoi ce point est dit *point simple*.

Si les formules (4) font correspondre, à *tout point* simple de la courbe (C) qu'elles définissent, *une seule* valeur de u, on dit qu'elles fournissent une *représentation normale* de (C); dans le cas contraire, la représentation est dite *impropre*.

4. *Remarque.* — D'après les définitions du point simple, que la courbe soit plane ou gauche, on voit que si deux points simples M et M' d'une courbe correspondent à deux valeurs infiniment voisines u et $u + \Delta u$ du paramètre, la distance de ces deux points

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{(a_1 \Delta u + \ldots)^2 + (b_1 \Delta u + \ldots)^2 + (c_1 \Delta u + \ldots)^2}$$

est un infiniment petit du même ordre que Δu, puisque le second membre, divisé par Δu, tend vers $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$, expression qui ne peut être nulle, l'un au moins des termes soumis au radical étant différent de zéro.

III. — Surfaces; point simple.

5. Une *surface* est, par définition, le lieu des points de l'espace, dont les coordonnées cartésiennes (x, y, z) satisfont à une équation $F(x, y, z) = 0$, la fonction F étant développable par la formule de Taylor aux environs de tout point (x_0, y_0, z_0) où elle est nulle, sauf de certains points exceptionnels, isolés ou formant des suites continues isolées.

Un point (x_0, y_0, z_0) est dit *point simple* d'une surface $F(x, y, z) = 0$ si, aux environs de ce point, la fonction F est développable par la formule de Taylor et si, de plus, ses dérivées partielles du premier ordre ne sont pas nulles toutes les trois en ce point.

Il suit de là que l'une des coordonnées de la surface est une fonction continue des deux autres aux environs de tout point simple. Soit, en effet, $F'_{z_0} \neq 0$ par exemple. On sait que l'équation

$$(5) \quad 0 = F(x, y, z) = (x - x_0) F'_{x_0} + (y - y_0) F'_{y_0} + (z - z_0) F'_{z_0} + \ldots$$

définit, pour toutes les valeurs de x et y comprises dans un certain domaine, une fonction z qui dans tout le domaine est développable suivant les puissances de $x - x_0$ et de $y - y_0$, et qui, pour $x = x_0$, $y = y_0$, prend la valeur z_0.

Dans beaucoup de questions, il convient de considérer une surface comme étant le lieu des positions d'un point dont les trois coordonnées cartésiennes sont des fonctions continues de deux variables indépendantes u, v. Ces trois fonctions sont supposées développables par la formule de Taylor aux environs de tout couple (u, v) appartenant à un certain domaine, sauf de certains couples exceptionnels, isolés ou pouvant former des suites continues isolées. Si l'on considère u, v comme les coordonnées d'un point figuré dans un plan auxiliaire, les développements seront supposés possibles aux environs de tout point de ce plan, sauf de certains points isolés, ou formant dans ce plan des suites isolées.

On dit alors qu'un point (x_0, y_0, z_0) est *point simple* d'une surface si les coordonnées de *tout* point de cette surface, situé à l'intérieur d'une sphère décrite du point (x_0, y_0, z_0) comme

centre avec un rayon déterminé, peuvent être représentées par *un seul et même système* de trois fonctions de deux paramètres

$$(6)\qquad x=f_1(u,v),\qquad y=f_2(u,v),\qquad z=f_3(u,v),$$

qui, prenant respectivement les valeurs x_0, y_0, z_0 pour $u=u_0$, $v=v_0$, soient, aux environs du couple (u_0, v_0), développables en séries entières procédant suivant les puissances de $u-u_0$ et de $v-v_0$,

$$(7)\qquad x=f_1(u,v)=x_0+a_1(u-u_0)+b_1(v-v_0)+\ldots,$$
$$(8)\qquad y=f_2(u,v)=y_0+a_2(u-u_0)+b_2(v-v_0)+\ldots,$$
$$(9)\qquad z=f_3(u,v)=z_0+a_3(u-u_0)+b_3(v-v_0)+\ldots,$$

et telles en outre que les *déterminants fonctionnels*

$$x'_u y'_v - y'_u x'_v,\qquad y'_u z'_v - z'_u y'_v,\qquad z'_u x'_v - x'_u z'_v$$

ne soient pas nuls tous les trois pour $u=u_0$, $v=v_0$.

Ces définitions des surfaces et de leurs points simples s'accordent avec les définitions précédentes. Considérons, en effet, une surface représentée aux environs d'un point (x_0, y_0, z_0) par l'équation (5) où l'on suppose $F'_{z_0}\neq 0$. Nous avons vu que la coordonnée z de cette surface est développable en une série procédant suivant les puissances de $x-x_0$ et de $y-y_0$

$$(5)'\qquad z=z_0+\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\ldots.$$

Si donc on prend pour x et y deux fonctions de u et v développables sous les formes (7) et (8), en les substituant dans l'expression (5)′ de z, on obtiendra un développement de la forme (9) et l'on pourra choisir les deux fonctions x et y de telle façon que l'un au moins des trois déterminants

$$a_1 b_2 - a_2 b_1,\qquad a_2 b_3 - a_3 b_2,\qquad a_3 b_1 - a_1 b_3$$

soit différent de zéro ; car, si l'on pose en particulier $x=u$, $y=v$, le premier de ces déterminants se réduit à l'unité. Ainsi, les définitions qu'exprime l'équation (5) entraînent celles que nous avons données ensuite.

Réciproquement, partons des équations (7), (8), (9) où nous supposerons, par exemple, $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$. Les deux premières définissent deux fonctions u, v qui se réduisent respectivement

à u_0 et v_0 pour $x = x_0$, $y = y_0$ et qui, dans le voisinage de ce point, sont développables par la formule de Taylor

$$u = u_0 + \alpha_1(x - x_0) + \beta_1(y - y_0) + \ldots,$$
$$v = v_0 + \alpha_2(y - y_0) + \beta_2(y - y_0) + \ldots.$$

Portant ces valeurs dans la série (9), on aura z développé suivant les puissances de $x - x_0$ et de $y - y_0$; c'est là une équation de la forme (5),

$$0 = F(x, y, z) = -(z - z_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + \ldots.$$

Déduite de formules qui, par hypothèse, représentent *tous* les points de la surface voisine de (x_0, y_0, z_0), cette équation les représente tous également, de sorte que le point est un point simple de la surface, puisque l'une au moins des dérivées partielles de F est différente de zéro en ce point, F'_{z_0} se réduisant à -1. Ainsi, les définitions données en second lieu pour une surface et ses points simples entraînent celles qu'exprime l'équation (5).

Un point (x_0, y_0, z_0) est dit *point multiple* d'ordre n d'une surface $F = 0$ si, aux environs de ce point, la fonction F est développable par la formule de Taylor et si ses dérivées partielles des $n - 1$ premiers ordres sont toutes nulles en ce point, mais non celles de l'ordre n.

Dans ce cas, le développement (5) commence par des termes d'ordre n en $x - x_0$, $y - y_0$ et $z - z_0$. On sait que, quand il en est ainsi, on peut représenter *tous* les points de la surface qui avoisinent le point (x_0, y_0, z_0) par un ou plusieurs systèmes de développements tels que (7), (8), (9), dans chacun desquels les déterminants

$$a_1 b_2 - a_2 b_1, \qquad a_2 b_3 - a_3 b_2, \qquad a_3 b_1 - a_1 b_3$$

peuvent être nuls tous les trois, et le sont nécessairement si un seul système de développements suffit.

6. Voici comment on est conduit à la *représentation paramétrique* des surfaces que nous venons d'étudier. On peut considérer une surface comme engendrée par une courbe, variable de forme et de position. Or, une telle courbe est représentée par trois équations du type (6),

$$(6) \qquad x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v);$$

car, l'un des deux paramètres, v par exemple, étant fixé, si l'on fait varier u, le point (x, y, z) décrit une certaine courbe et, suivant les valeurs qu'on attribue successivement à v, cette courbe se déplace et se déforme. Elle engendre une surface qui est représentée par les formules (6), et nous avons indiqué un moyen théorique de former l'équation cartésienne de cette surface aux environs de chacun de ses points simples. L'élimination de u et v entre les équations (6) peut être conçue comme effectuée, mais elle n'est presque jamais nécessaire. Ces paramètres ont reçu le nom de *coordonnées curvilignes,* qui rappelle qu'à toute valeur attribuée à l'un d'eux correspond une courbe tracée sur la surface. Les deux systèmes de *courbes coordonnées* $u =$ const. et $v =$ const. constituent par leur ensemble ce que l'on appelle un *réseau.*

7. *Remarque.* — Il existe évidemment pour toute surface une infinité de représentations paramétriques; car une surface peut, d'une infinité de manières différentes, être considérée comme engendrée par une courbe variable de forme et de position, et, à chaque mode de génération, correspond un système de coordonnées curvilignes. Mais il suffit d'en connaître un pour en déduire d'autres en tel nombre qu'on voudra. Il suffit, en effet, dans les formules (6), où les fonctions f_1, f_2, f_3 sont supposées connues, de remplacer u et v par deux fonctions arbitraires de deux nouveaux paramètres u' et v', pour obtenir un nouveau réseau de courbes coordonnées $u' =$ const. et $v' =$ const.

En procédant ainsi, on substituera généralement à une *représentation normale* une *représentation impropre.* Supposons que les formules (6) fournissent une représentation normale d'une surface, c'est-à-dire qu'à *tout* point simple (x_0, y_0, z_0) corresponde un *seul* couple (u_0, v_0). On fait le changement de variables

$$u = \varphi(u', v'), \qquad v = \psi(u', v'). \tag{10}$$

Si les fonctions φ et ψ prennent respectivement les valeurs u_0 et v_0 pour $u' = u'_0$, $v' = v'_0$, et si aux environs de ce couple chacune d'elles est développable par la formule de Taylor, les équations (7), (8), (9) donneront pour x, y, z des séries entières en $u' - u'_0$ et $v' - v'_0$. Mais, étant donné un point simple (x_0, y_0, z_0)

de la surface, c'est-à-dire un couple unique (u_0, v_0), les équations (10) lui feront généralement correspondre plusieurs couples (u'_0, v'_0), (u'_1, v'_1), ...; car, pour $u = u_0$ et $v = v_0$, elles représentent dans le plan des $u'v'$ deux courbes qui, d'ordinaire, se coupent en plusieurs points. Ainsi la représentation (u', v') sera généralement *impropre*. Nous avons vu d'ailleurs (n° 5) que, connaissant l'équation cartésienne d'une surface, on peut en déduire une représentation paramétrique qui sera généralement normale aux environs de tout point simple, et le sera sûrement si l'on prend pour u et v deux des coordonnées convenablement choisies. Ainsi, *l'on peut toujours supposer les équations* (6) *telles qu'à tout point simple de la surface corresponde un seul couple* (u, v).

Nous n'emploierons dorénavant que des représentations normales. Mais il importe de remarquer qu'une telle représentation peut ne pas se prêter également bien à l'étude de toutes les parties d'une surface, en cessant par exemple d'être normale pour certains points simples. Tel est le cas des formules

$$x = \sin u \cos v, \qquad y = \sin u \sin v, \qquad z = \cos u,$$

qui donnent tous les points de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

quand u varie de zéro à π et v de zéro à 2π, et qu'on peut considérer à ce titre (n° 2) comme fournissant une représentation normale; pour le point $x = y = 0$, $z = 1$ on voit que u est nul, mais v est absolument indéterminé.

8. *Exemples.* — Nous allons rapporter les quadriques à leurs génératrices rectilignes. Considérons d'abord l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

On peut remplacer son équation par l'un ou l'autre des deux systèmes

$$(u)\ \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = u\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{u}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right); \end{cases} \qquad (v)\ \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = v\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{v}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

Ces quatre équations se réduisent à trois; en les résolvant par rapport à x, y, z, on trouve

$$\frac{x}{a} = \frac{uv+1}{u+v}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{u-v}{u+v}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{uv-1}{u+v},$$

et l'on voit que les courbes $u =$ const. et les courbes $v =$ const. sont les deux systèmes de génératrices rectilignes.

Pour le paraboloïde hyperbolique

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$$

la résolution des deux systèmes concordants

$$(u) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = u, \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \dfrac{2z}{u}, \end{cases} \qquad (v) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \dfrac{2z}{v}, \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = v, \end{cases}$$

donne la représentation paramétrique suivante

$$2x = \sqrt{p}(u+v), \qquad 2y = \sqrt{q}(u-v), \qquad 2z = uv,$$

où le réseau des courbes coordonnées $u =$ const., $v =$ const. est formé des deux systèmes de génératrices rectilignes.

IV. — Courbes tracées sur une surface; intersection de deux surfaces.

9. Si, dans les formules (6) qui définissent une surface, on remplace u et v par deux fonctions d'un même paramètre

$$u = \psi_1(t), \qquad v = \psi_2(t),$$

propres à définir une courbe plane de coordonnées u et v, les expressions de x, y, z deviendront des fonctions de t, remplissant les conditions nécessaires pour définir une courbe de l'espace. Cette courbe sera évidemment située sur la surface (6).

Réciproquement, *une surface étant définie par les formules*

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v),$$

toute courbe tracée sur cette surface est représentée par ces mêmes formules, où les variables u et v sont considérées comme dépendant l'une de l'autre ou, plus généralement, comme dépendant d'un même paramètre.

En effet, dire qu'une courbe (C)

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t)$$

est tracée sur la surface (S) définie par les relations (6), c'est dire que, pour toute valeur de t, les trois équations

$$\varphi_1(t) = f_1(u, v), \qquad \varphi_2(t) = f_2(u, v), \qquad \varphi_3(t) = f_3(u, v)$$

admettent des solutions communes en u et v. Or soit t_0 la valeur de t qui correspond à un point simple (x_0, y_0, z_0) de la courbe (C), point qui peut d'ailleurs être simple ou multiple pour la surface (S); soit (u_0, v_0) le couple de valeurs de u et v qui correspond à ce point, s'il est simple, ou, s'il est multiple, l'un des couples qui le donnent. Les trois fonctions f sont développables (fin du n° 5) suivant les puissances de $u - u_0$ et de $v - v_0$; d'autre part, les trois fonctions φ sont développables (n° 1) suivant les puissances de $t - t_0$ et l'une d'elles au moins contient un terme en $t - t_0$; supposons que ce soit la première. Dès lors on peut, de l'équation $\varphi_1 = f_1$, déduire (n° 5) pour t une série procédant suivant les puissances de $u - u_0$ et de $v - v_0$

$$(11) \qquad t = t_0 + a(u - u_0) + b(v - v_0) + \ldots.$$

En substituant cette expression de t dans l'équation $\varphi_2 = f_2$, on obtient une relation de la forme $\Phi(u, v) = 0$, la fonction Φ étant développée suivant les puissances de $u - u_0$ et de $v - v_0$. D'après les résultats du n° 1, les variables u, v, liées par cette équation, peuvent être représentées, aux environs du couple (u_0, v_0), par un ou plusieurs systèmes de deux séries procédant suivant les puissances entières d'un nouveau paramètre w et l'un de ces couples de développements

$$(12) \qquad u = \psi_1(w), \qquad v = \psi_2(w),$$

ainsi que celui qui en résulte pour t d'après la relation (11), étant substitués dans l'équation $\varphi_3 = f_3$ la vérifient identiquement, puisque la courbe (C) est supposée tracée sur la surface (S). L'existence des relations (12) établit et précise notre énoncé.

10. Des définitions précédemment données pour les courbes et les surfaces il résulte que, *par toute courbe, on peut faire passer une infinité de surfaces.* En effet, étant donnée une courbe

$$x = \varphi_1(u), \quad y = \varphi_2(u), \quad z = \varphi_3(u),$$

il existe évidemment une infinité de systèmes de trois fonctions

$$(6) \qquad x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v)$$

propres à définir une surface, et qui, pour une valeur $v = v_0$ assignée à l'avance, se réduisent respectivement à $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u)$; à chacun de ces systèmes correspond une surface qui passe par la courbe considérée.

On appelle *intersection de deux surfaces* le lieu des points communs à ces deux surfaces. D'après ce qu'on vient de voir, *toute courbe plane ou gauche peut être considérée comme formant en partie, sinon en totalité, l'intersection de deux surfaces.* Ainsi, la courbe

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$$

est commune aux deux cylindres

$$y^2 - zx = 0, \quad x^2 - y = 0;$$

mais elle ne forme pas toute leur intersection, dont fait évidemment partie la droite $x = y = 0$.

La réciproque du théorème précédent est loin d'être évidente, à raison des définitions que nous avons adoptées; il y a donc lieu de démontrer que *les points communs à deux surfaces forment une courbe ou un système de courbes.* Pour établir cette proposition, considérons un point $M(x_0, y_0, z_0)$, simple ou multiple, commun à deux surfaces (S) et (Σ). *Tous* les points de (S) situés au voisinage de M peuvent être représentés (n° 5) par un ou plusieurs systèmes de développements tels que le suivant

$$(7) \qquad x = x_0 + a_1(u - u_0) + b_1(v - v_0) + \ldots,$$

$$(8) \qquad y = y_0 + a_2(u - u_0) + b_2(v - v_0) + \ldots,$$

$$(9) \qquad z = z_0 + a_3(u - u_0) + b_3(v - v_0) + \ldots.$$

D'autre part, *tous* les points de la surface (Σ) situés aux environs

de M sont représentés (n° 5) par une équation de la forme

$$(5) \quad 0 = F(x, y, z) = (x - x_0) F'_{x_0} + (y - y_0) F'_{y_0} + (z - z_0) F'_{z_0} + \ldots,$$

où les termes du premier degré peuvent manquer. Des formules (7), (8) et (9) tirons les différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ pour les porter dans l'équation (5). Nous obtenons une relation

$$0 = \Phi(u, v) = \alpha(u - u_0) + \beta(v - v_0) + \ldots,$$

qui devra être vérifiée par les paramètres (u, v) de tout point voisin de M et commun à deux *nappes* des surfaces (S) et (Σ).

Réciproquement, à tout couple (u, v), suffisamment voisin de (u_0, v_0), qui vérifie l'équation $\Phi = 0$ correspond un point commun aux deux surfaces. En effet, ce couple, substitué dans les formules (7), (8) et (9), donne un point de la surface (S), et ce point appartient à la surface (Σ) puisque l'équation $\Phi = 0$, qui n'est autre que l'équation $F = 0$, est vérifiée.

Or l'équation $\Phi = 0$ ne se réduit pas à une identité, sans quoi les deux surfaces (S) et (Σ) coïncideraient, au moins dans une certaine région. On peut donc en tirer (n° 1) pour u et v un ou plusieurs systèmes de développements procédant suivant les puissances entières d'un nouveau paramètre t. Par suite, en vertu des formules (7), (8), (9), les coordonnées des points voisins de M et communs aux deux surfaces s'expriment par un ou plusieurs systèmes de séries entières en t. Ces points forment donc une ou plusieurs courbes.

Remarque. — Cette démonstration ne s'applique, pas plus que celle du n° 9, aux suites continues qui seraient formées de ces points que nous avons appelés *exceptionnels* (n° 5). Il n'en saurait être autrement, puisque ces singularités supérieures n'ont été définies que par un caractère purement négatif, qui n'apprend rien sur la représentation de la surface dans leur voisinage.

CHAPITRE II.

ÉLÉMENTS ET PROPRIÉTÉS DU PREMIER ORDRE DES COURBES ET DES SURFACES.

I. — Éléments géométriques des divers ordres.

1. *Définitions.* — On appelle *éléments du $n^{ième}$ ordre* tous les éléments géométriques d'une figure (courbe ou surface) dont la détermination exige la connaissance des coordonnées des points de cette figure, ainsi que de leurs *dérivées des n premiers ordres* par rapport aux paramètres dont elles dépendent. On appelle *propriétés du $n^{ième}$ ordre* celles dans l'énoncé desquelles n'interviennent que des éléments des n premiers ordres.

Pour que ces définitions aient un sens, il faut évidemment qu'un élément géométrique, qui est d'un certain ordre dans un certain système de représentation de la figure à laquelle il appartient, reste de cet ordre quand on substitue aux paramètres primitifs des paramètres nouveaux. C'est ce qui résulte de la théorie des changements de variables : on sait, en effet, que si $x, y, z, \ldots$ sont des fonctions de p paramètres $u, v, w, \ldots$, et si l'on établit entre $u, v, w, \ldots$ et p nouveaux paramètres $u', v', w', \ldots$ des équations *finies* (c'est-à-dire ne contenant pas de dérivées) propres à déterminer les premiers en fonction des seconds, les dérivées d'ordre n des $x, y, z, \ldots$ par rapport aux $u, v, w, \ldots$ s'expriment en fonction des dérivées prises par rapport aux $u', v', w', \ldots$ jusqu'au même ordre n, ni plus ni moins.

Nous allons définir et étudier dans ce Chapitre les principaux éléments du premier ordre, tangente, élément d'arc, plan tangent, élément linéaire. Nous nous occuperons plus tard des éléments d'ordre supérieur.

II. — Tangentes et normales.

2. Des définitions que nous avons données au début du premier Chapitre (nos 1 et 3), il résulte que *la droite qui joint un point simple* M *d'une courbe plane ou gauche* (C) *à un point voisin* M′, *pris sur cette courbe, tend vers une position limite, bien déterminée, quand* M′ *tend vers* M. Soient en effet (x, y, z) les coordonnées de M et Δx, Δy, Δz les accroissements qu'elles éprouvent entre M et M′. Les coefficients directeurs de la corde MM′ étant proportionnels à ces accroissements, on peut les exprimer par les rapports de Δx, Δy et Δz à Δu, en désignant par Δu l'accroissement qu'éprouve entre M et M′ le paramètre dont dépendent les coordonnées de la courbe (C). Or, d'après nos hypothèses, quand M′ tend vers M, Δu tend vers zéro, et les rapports précédents tendent vers des valeurs parfaitement déterminées, qui sont les valeurs des dérivées x', y', z' de x, y, z par rapport à u au point considéré M. Ainsi, la corde MM′ tend vers une position limite, celle de la droite que représentent les équations

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}. \tag{1}$$

C'est, par définition, la *tangente* en M à la courbe (C).

Si l'ensemble des points de la courbe (C), qui avoisinent le point M, est représenté par plusieurs systèmes de développements (Ch. I, nos 1 et 3), plusieurs *branches* de la courbe se croisent en ce point, qui est appelé *point multiple;* l'un de ces systèmes de développements donnera, pour les accroissements qu'éprouvent les coordonnées entre M et un point voisin M′,

$$\Delta x = a\,\Delta u^p + \ldots, \qquad \Delta y = b\,\Delta u^q + \ldots, \qquad \Delta z = c\,\Delta u^r + \ldots.$$

Si les trois exposants p, q, r sont égaux entre eux, la corde MM′, qui a pour équations

$$\frac{X-x}{\Delta x} = \frac{Y-y}{\Delta y} = \frac{Z-z}{\Delta z},$$

tendra vers la droite

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c}.$$

Si deux des exposants sont égaux et moindres que le troisième, $p = q < r$, la corde MM'

$$\frac{X-x}{a+\ldots} = \frac{Y-y}{b+\ldots} = \frac{Z-z}{c\Delta u^{r-p}+\ldots}$$

tend vers la droite

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b}, \qquad Z-c=0.$$

Si l'un des exposants est moindre que les deux autres, $r < p$, $r < q$, la corde MM'

$$\frac{X-x}{a\Delta u^{p-r}+\ldots} = \frac{Y-y}{b\Delta u^{q-r}+\ldots} = \frac{Z-z}{c+\ldots}$$

tend vers la droite $X - x = 0$, $Y - y = 0$. Dans tous les cas, les branches de courbe représentées par chaque système de développements ont une même tangente bien déterminée. Ainsi *toute courbe admet une tangente ou un certain nombre de tangentes en chacun de ses points*. Il n'y a d'exception que pour les points où les fonctions qui représentent la courbe cessent d'avoir des dérivées. Tel est, par exemple, le cas de l'origine pour la courbe

$$y = x \sin \frac{1}{x};$$

car le coefficient angulaire $y:x$ de la corde qui joint l'origine au point (x, y) ne tend vers aucune limite déterminée quand x tend vers zéro.

Pour une courbe plane située dans le plan des xy, la tangente au point (x, y) est représentée par l'équation

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'}.$$

De cette équation générale, on déduit celles qui conviennent, soit au cas où la courbe est définie par une équation cartésienne $F(x, y) = 0$, savoir

$$(2) \qquad (X-x)F'_x + (Y-y)F'_y = 0,$$

soit au cas où elle est rapportée à des coordonnées polaires r, θ.

Il suffit, en effet, de partir des formules de transformation

$$X = r\cos\theta, \qquad Y = r\sin\theta,$$

et d'y considérer r comme une fonction de θ pour trouver

$$(3) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\cos(\theta - \theta_0) + \left(\frac{1}{r}\right)'_0 \sin(\theta - \theta_0).$$

Telle est l'équation de la tangente au point de coordonnées r_0 et θ_0.

De l'équation (2), on conclut que, quand une courbe représentée par une équation de la forme $F = 0$ passe à l'origine des coordonnées, *on obtient le système de ses tangentes à l'origine en égalant à zéro l'ensemble des termes de moindre degré de l'équation*, la fonction F étant supposée développée suivant les puissances entières de x et de y.

Toute droite menée en un point M d'une courbe, perpendiculairement à sa tangente, est dite *normale* à cette courbe en M. Il est évident que les normales en un point simple d'une courbe forment un plan; c'est le *plan normal,* qui, en coordonnées rectangulaires, a pour équation

$$(4) \qquad (X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0.$$

Quand on étudie une courbe plane isolée, on entend par *normale* à cette courbe celle des normales qui est dans le plan de la courbe. Son équation est

$$(5) \qquad (X - x)x' + (Y - y)y' = 0.$$

Elle exprime visiblement que *la distance d'un point quelconque* (X, Y) *d'une normale à son point d'incidence* (x, y) *est un maximum ou un minimum pour la distance de ce point aux divers points de la courbe.* En coordonnées polaires, cette équation devient

$$(6) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{r'_0}\sin(\theta - \theta_0).$$

Certains segments rectilignes, qui sont liés aux tangentes et aux normales des courbes planes, se présentent naturellement dans la théorie de ces courbes. Voici leurs définitions, ainsi que leurs expressions, faciles à déduire des équations (2), (3), (5) et (6).

En coordonnées cartésiennes, la *tangente* MT et la *normale* MN en un point M (x, y) sont les portions de tangente et de normale comprises entre ce point et l'axe des x; on a, au signe près,

$$MT = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}, \qquad MN = y\sqrt{1+y'^2};$$

la *sous-tangente* S_t et la *sous-normale* S_n en un point M sont les projections, faites sur l'axe des x, des segments qui vont l'un de T en M, l'autre de N en M; on a, en grandeur et signe,

$$S_t = -\frac{y}{y'}, \qquad S_n = yy'.$$

Dans ces formules, comme dans les précédentes, y' désigne la dérivée de y par rapport à x; les coordonnées sont supposées rectangulaires. On voit que *toute courbe dont la sous-normale est constante est une parabole;* car le carré de son ordonnée est une fonction linéaire de l'abscisse.

En coordonnées polaires, la *sous-tangente* S'_t et la *sous-normale* S'_n en un point $M(r_0, \theta_0)$ sont les valeurs algébriques des rayons vecteurs des points T′ et N′ qui correspondent sur la tangente et la normale en M à l'angle polaire $\theta_0 - \frac{\pi}{2}$; on a, en grandeur et signe,

$$S'_t = \frac{r_0^2}{r'_0}, \qquad S'_n = -r'_0.$$

La *tangente* MT′ et la *normale* MN′ sont les portions de tangente et de normale comprises entre le point M et la droite T′ON′, qui a été menée par le pôle O perpendiculairement à OM ; on a, au signe près,

$$MT' = \frac{r_0}{r'_0}\sqrt{r_0^2 + r_0'^2}, \qquad MN' = \sqrt{r_0^2 + r_0'^2}.$$

On voit que *toute courbe dont la sous-normale polaire est constante est une spirale d'Archimède;* car son rayon vecteur est une fonction linéaire de l'angle polaire θ.

III. — Détermination de courbes par des propriétés du premier ordre.

3. Les propriétés relatives aux tangentes et aux plans normaux, ainsi que celles des normales à une courbe plane, correspondent à des relations où figurent des dérivées du premier ordre. C'est pourquoi, quand on cherche à déterminer des courbes d'après une condition assignée à ces éléments, on est conduit à des équations différentielles du premier ordre.

Supposons, par exemple, que les plans normaux d'une courbe passent tous par un point fixe $x = y = z = 0$. Nous aurons l'équation différentielle

$$xx' + yy' + zz' = 0,$$

qui ne suffit évidemment pas à déterminer la courbe, mais qui entraîne

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.}$$

Donc, *toute courbe dont les plans normaux passent par un point fixe est tracée sur une sphère décrite de ce point comme centre*. Il est prouvé aussi par là que *toute courbe plane dont les normales passent par un point fixe est un cercle décrit de ce point comme centre*.

Comme autre exemple, soit à *trouver une courbe telle que la normale en chacun de ses points fasse des angles égaux avec les rayons vecteurs qui vont de ce point à deux points fixes* $F(x = c, y = 0)$ et $F'(x = -c, y = 0)$. L'équation du problème est, en axes rectangulaires,

$$(7) \qquad xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - y^2 - c^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Pour l'intégrer, remarquons que l'origine est évidemment un centre de symétrie de la courbe, ce qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier. On est ainsi conduit à prendre de nouvelles variables

$$x^2 = \xi, \qquad y^2 = \eta; \qquad \eta' = \frac{d\eta}{d\xi}.$$

L'équation précédente devient alors

$$\eta - \xi\eta' + \frac{c^2\eta'}{\eta' + 1} = 0.$$

C'est une équation de Clairaut; on obtient son intégrale générale en remplaçant la dérivée η' par une constante arbitraire λ. On trouve ainsi, en revenant aux notations primitives,

$$(8) \qquad y^2 - \lambda x^2 + \frac{c^2\lambda}{\lambda + 1} = 0,$$

c'est-à-dire des coniques ayant pour axes de symétrie la droite FF′ et la perpendiculaire en son milieu. Leurs demi-axes ont respectivement pour carrés

$$a^2 = \frac{c^2}{\lambda + 1}, \qquad b^2 = -\frac{c^2\lambda}{\lambda + 1},$$

d'où résulte $a^2 - b^2 = c^2$. En conséquence, *les courbes cherchées sont les ellipses et les hyperboles qui ont pour foyers les points* F *et* F′.

4. *Remarque.* — Si la propriété qu'on assigne à la normale ou à la tangente d'une courbe s'exprime par une relation où n'interviennent que les coefficients de l'équation de cette droite, on sera toujours conduit à une équation du type

$$(9) \qquad y = xf(p) + \varphi(p), \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right),$$

qu'on intègre par différentiation. En effet, pour une normale

$$X + pY = x + py,$$

on aura une relation de la forme

$$x + py = \psi(p),$$

qui appartient au type ci-dessus. Pour une tangente

$$Y - pX = y - px,$$

on sera conduit à une équation de Clairaut

$$(10) \qquad y = px + \varphi(p).$$

Pour avoir l'intégrale générale d'une pareille équation, qui est aussi du type précédent, il suffit, comme on sait, d'y remplacer la dérivée p par une constante arbitraire C. De là une observation générale : on cherche une courbe dont les tangentes jouissent d'une certaine propriété et l'on trouve, pour intégrale générale de l'équation qui exprime cette propriété, une infinité de droites

$$y = Cx + \varphi(C) \tag{11}$$

qui dépendent d'un paramètre arbitraire C. Il n'y a point contradiction entre l'énoncé et ce résultat. On sait, en effet, que les droites dont l'ensemble constitue l'intégrale générale d'une équation de Clairaut ne sont pas les seules solutions de cette équation; mais que cette équation est vérifiée aussi par la fonction y de la variable x que définissent les deux équations

$$y = Cx + \varphi(C), \qquad x + \varphi'(C) = 0.$$

A cette solution, appelée *solution singulière,* correspond une courbe (E) qui, nous le verrons au Chapitre suivant, est tangente à toutes les droites représentées par l'équation (11). Cette courbe (E) est celle que l'on cherchait, puisque ses tangentes jouissent de la propriété assignée. Mais il faut expliquer pourquoi l'on a trouvé ces tangentes elles-mêmes comme solutions du problème proposé. Soit M le point où l'une de ces droites (D) touche la courbe (E); les coordonnées (x, y) de ce point et le coefficient angulaire p de sa tangente (D) vérifient l'équation du problème. On peut d'ailleurs considérer cette droite (D) comme une courbe qui est à elle-même sa propre tangente en tous ses points; comme l'équation du problème ne contient, *par hypothèse,* que les coefficients p et $y - px$, qui ont les mêmes valeurs tout le long de la tangente (D) qu'au point M, on voit que les coordonnées de tout point de cette droite, ainsi que la dérivée p de son ordonnée, satisferont à l'équation considérée. Les tangentes à la courbe (E) doivent donc être des intégrales du problème; seulement la solution véritable du problème géométrique est fournie par la solution singulière de l'équation (10).

Voici un exemple très simple de ce fait. Soit à *trouver une courbe telle que le produit des distances de deux points fixes*

$F(y=0,\ x=c)$ *et* $F'(y=0,\ x=-c)$ *à toutes ses tangentes soit une constante donnée* b^2. L'équation du problème est

$$(y-px)^2-p^2c^2=b^2(1+p^2).$$

On peut l'écrire

$$y=px\pm\sqrt{b^2+(b^2+c^2)p^2}.$$

Son intégrale générale est l'ensemble des droites

$$y=mx\pm\sqrt{b^2+(b^2+c^2)m^2},$$

toutes tangentes à l'ellipse

$$\frac{x^2}{b^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

qui est la courbe cherchée. Les points F et F′ sont ses foyers.

IV. — Élément d'arc; cosinus directeurs de la tangente.

5. Considérons sur une courbe (C), plane ou gauche, un arc AB, qui sera supposé parcouru par un point M dans un sens déterminé, par exemple de A vers B. Sur l'arc AB, marquons $n-1$ points intermédiaires $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, tels que le point M les rencontre dans l'ordre de succession de leurs indices lorsqu'il décrit l'arc AB dans le sens convenu. Menons les droites AM_1, $M_1M_2, \ldots, M_{n-1}B$; nous formons ainsi une ligne brisée, inscrite dans l'arc AB, et dont le périmètre dépend évidemment du nombre et de la position des sommets M_r.

Nous allons montrer que, quand le nombre des côtés de la ligne brisée croît indéfiniment, leur mode d'inscription étant d'ailleurs quelconque, sous la seule condition que la longueur de chacun d'eux tende vers zéro, les divers périmètres arrivent à différer aussi peu qu'on veut les uns des autres.

A cet effet, définissons la courbe (C) en coordonnées rectangulaires par les formules

$$x=f_1(u),\qquad y=f_2(u),\qquad z=f_3(u).$$

D'après les hypothèses faites au Chapitre I sur ces fonctions, à

chaque position du point $M(x, y, z)$ sur l'arc AB correspond une valeur et une seule du paramètre u. Nous admettrons, en outre, que les valeurs de u, qui correspondent aux positions successives du point M entre A et B, aillent toutes en croissant ou toutes en décroissant; par exemple qu'elles forment une suite croissante. Soient donc

$$u_a < u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-1} < u_b$$

la suite des valeurs de u qui correspondent aux sommets de l'une des lignes brisées inscrites dans l'arc AB. Le côté $M_r M_{r+1}$ a pour longueur

$$c_r = \sqrt{[f_1(u_{r+1}) - f_1(u_r)]^2 + [f_2(u_{r+1}) - f_2(u_r)]^2 + [f_3(u_{r+1}) - f_3(u_r)]^2}.$$

Les fonctions f étant supposées admettre des dérivées, on a, pour chacune d'elles,

$$f(u_{r+1}) - f(u_r) = (u_{r+1} - u_r)[f'(u_r) + \varepsilon_r],$$

en désignant par ε_r un terme qui tend vers zéro avec la différence $(u_{r+1} - u_r)$. Par suite, l'expression du côté c_r devient

$$c_r = (u_{r+1} - u_r)\left[\sqrt{f_1'^2(u_r) + f_2'^2(u_r) + f_3'^2(u_r)} + \eta_r\right],$$

le terme η_r pouvant être rendu aussi petit qu'on voudra, pourvu que l'intervalle $(u_{r+1} - u_r)$ soit suffisamment voisin de zéro. En conséquence, le périmètre de la ligne brisée AB sera

$$\sum c_r = \sum \sqrt{f_1'^2(u_r) + f_2'^2(u_r) + f_3'^2(u_r)}\,(u_{r+1} - u_r) + \sum \eta_r (u_{r+1} - u_r).$$

Or, quand chaque côté de la ligne brisée tend vers zéro, les différences $(u_{r+1} - u_r)$ s'évanouissent aussi; on sait que dans ces conditions les sommes $\Sigma \eta_r (u_{r+1} - u_r)$ tendent vers zéro. D'autre part, les dérivées f' étant par hypothèse continues, la fonction

$$\sqrt{f_1'^2(u) + f_2'^2(u) + f_3'^2(u)}$$

est elle-même continue; et les sommes

$$\sum \sqrt{f_1'^2(u_r) + f_2'^2(u_r) + f_3'^2(u_r)}\,(u_{r+1} - u_r)$$

arrivent à différer aussi peu qu'on veut de l'une d'elles, qu'on re-

présente par le symbole

$$\int_{u_a}^{u_b} \sqrt{f_1'^2(u)+f_2'^2(u)+f_3'^2(u)}\,du.$$

C'est la longueur mesurée par cette intégrale qu'on appelle *la longueur de l'arc* AB, ou plus simplement *l'arc* AB.

D'après les propriétés connues des intégrales, l'arc compris entre un point fixe A et un point M variable sur la courbe est une fonction s du paramètre u qui correspond à son extrémité M; cette fonction est continue et admet une dérivée, qui est précisément la fonction soumise au signe de sommation; on a donc

$$s = \int_{u_a}^{u} \sqrt{f_1'^2(u)+f_2'^2(u)+f_3'^2(u)}\,du,$$

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{f_1'^2(u)+f_2'^2(u)+f_3'^2(u)}.$$

L'*élément d'arc,* ou la différentielle de l'arc s, sera représenté par les formules équivalentes

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}\,du,\\ ds &= \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},\end{aligned}\right.$$

dont la dernière ne contient que les différentielles des coordonnées sans spécification de la variable dont elles dépendent.

Pour une courbe plane, située dans le plan $z=0$, on aura

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} s &= \int_{u_a}^{u} \sqrt{x_u'^2+y_u'^2}\,du,\\ ds &= \sqrt{dx^2+dy^2}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on applique la première de ces formules au cercle

$$x = \mathrm{R}\cos u, \qquad y = \mathrm{R}\sin u,$$

en comptant les arcs à partir du point $u=0$, on trouvera

$$s = \int_0^u \mathrm{R}\,du = \mathrm{R}u,$$

résultat conforme à celui que fournit la Géométrie élémentaire.

Si, dans la seconde, on prend l'abscisse pour variable indépendante, il vient

$$(13)' \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2},$$

y' désignant la dérivée de l'ordonnée par rapport à l'abscisse.

Remarque. — Tous les radicaux écrits dans ce paragraphe sont nécessairement pris en valeur arithmétique, parce que le sens dans lequel les arcs sont décrits par le point M est celui qui correspond à des valeurs croissantes du paramètre u. Il est évident que tous ces radicaux devraient être affectés du signe *moins* si l'on faisait l'hypothèse contraire. Nous ferons d'habitude la première; c'est-à-dire que nous compterons les arcs dans le sens où se meut le point décrivant lorsque le paramètre va en croissant.

6. Afin de ne pas interrompre notre étude générale des éléments du premier ordre, nous renverrons à un Chapitre ultérieur la détermination des arcs de certaines courbes, nous bornant ici à déduire de l'analyse qui précède une proposition et des formules importantes.

Théorème. — *Le rapport d'un arc à la corde qui le sous-tend a pour limite l'unité, quand cet arc tend vers zéro.*

Soient, en effet, u et $u+h$ les deux valeurs de u qui correspondent à l'origine et à l'extrémité d'un arc; la longueur de cet arc est

$$\Delta s = s(u+h) - s(u) = h[s'(u) + \varepsilon],$$

ε tendant vers zéro avec h. La seconde expression de c_r (n° 5), où nous ferons $u_r = u$, $u_{r+1} = u+h$, devient

$$c = h\left[\sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u} + \eta\right] = h[s'(u) + \eta],$$

η tendant aussi vers zéro avec h. Or nous avons vu que, quand l'extrémité de l'arc se rapproche indéfiniment de son origine, h tend vers zéro. Dans ces conditions, il est visible que le rapport $\Delta s : c$ tend vers l'unité, ce qui démontre le théorème.

Pour que notre conclusion soit valable, il faut toutefois que $s'(u)$ ne soit pas nul. On est assuré qu'il n'en sera jamais ainsi

quand l'origine de l'arc sera un point simple. Car, en un tel point, les dérivées x'_u, y'_u, z'_u ne sont pas nulles à la fois (Ch. I, n° 3).

7. Pour définir sans ambiguïté *les cosinus directeurs de la tangente* en un point $M(x, y, z)$ d'une courbe, considérons celle des directions de la tangente qui va dans le sens des arcs croissants; soient α, β, γ les cosinus des angles que cette direction fait avec les axes Ox, Oy, Oz. On l'obtient comme direction limite du segment qui a pour origine le point M et pour extrémité un point voisin $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, tel que l'*accroissement* Δs qu'éprouve l'arc de la courbe quand le point décrivant passe de M en M' soit *positif*. Si l'on désigne par c le nombre essentiellement positif qui mesure la longueur de ce segment, on sait que ses cosinus directeurs ont pour valeurs algébriques

$$\frac{\Delta x}{c}, \quad \frac{\Delta y}{c}, \quad \frac{\Delta z}{c}.$$

Ces expressions peuvent être écrites

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}\frac{\Delta s}{c}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s}\frac{\Delta s}{c}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s}\frac{\Delta s}{c};$$

et, comme ici Δs et c sont positifs, le théorème précédent nous apprend que leur rapport tend vers $+1$ quand c tend vers zéro; de sorte que les cosinus de la direction MM' deviennent, à la limite,

$$(14) \qquad \alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Tels sont, *en grandeur et signe,* les cosinus directeurs de la tangente *menée dans le sens des arcs croissants.* On peut indifféremment les considérer comme les rapports des différentielles des coordonnées à celle de l'arc ou comme les dérivées des coordonnées par rapport à l'arc pris comme variable indépendante.

Ces formules n'impliquent en aucune façon que le sens des arcs croissants soit celui qui a été spécifié au n° 5. Mais si, dans les relations

$$\frac{\alpha}{x'} = \frac{\beta}{y'} = \frac{\gamma}{z'} = \frac{1}{\pm\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

qu'on en déduit immédiatement et qu'on pourrait d'ailleurs poser

a priori, on veut choisir *le signe qui convient au sens des arcs croissants*, il faut se rappeler que la dérivée s' est positive ou négative suivant que s varie ou ne varie pas dans le même sens que le paramètre u. Dans le premier cas, on devra donc prendre le radical avec le signe *plus;* dans le second, avec le signe *moins*.

V. — Plan tangent; normale.

8. Par un point d'une surface passent évidemment une infinité de courbes tracées sur cette surface; en effet, étant données les formules qui représentent cette surface

$$(S) \qquad x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v),$$

on peut, d'une infinité de manières, établir entre u et v une dépendance propre à définir une courbe, et cela de telle façon qu'à un certain couple (u_0, v_0) corresponde toujours le même point (x, y, z) de la surface. On aura ainsi déterminé sur la surface une infinité de courbes qui toutes passeront en ce point.

Théorème. — *Les tangentes menées en un point simple d'une surface à toutes les courbes tracées sur cette surface sont situées dans un même plan.*

Supposons, en effet, que dans les formules (S) les paramètres u et v soient des fonctions *déterminées* d'une variable indépendante t. Nous définissons ainsi sur la surface une courbe dont la tangente au point x, y, z a pour équations

$$(15) \qquad \frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'},$$

les dérivées x', y', z' étant prises par rapport à t; leurs expressions sont liées aux dérivées u' et v' de u et v par les formules

$$x' = \frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v} v',$$

$$y' = \frac{\partial y}{\partial u} u' + \frac{\partial y}{\partial v} v',$$

$$z' = \frac{\partial z}{\partial u} u' + \frac{\partial z}{\partial v} v'.$$

Si donc on désigne par $-\rho^{-1}$ la valeur commune des rapports (15),

on pourra remplacer les équations de la tangente par les trois suivantes :

$$\rho(X - x) + \frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v} v' = 0,$$

$$\rho(Y - y) + \frac{\partial y}{\partial u} u' + \frac{\partial y}{\partial v} v' = 0,$$

$$\rho(Z - z) + \frac{\partial z}{\partial u} u' + \frac{\partial z}{\partial v} v' = 0.$$

Or, comme on peut toujours choisir les fonctions u et v de telle sorte que leurs dérivées ne soient pas nulles pour la valeur de t qui correspond au point $M(x, y, z)$, les trois équations ci-dessus entraînent cette autre

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} X - x & x'_u & x'_v \\ Y - y & y'_u & y'_v \\ Z - z & z'_u & z'_v \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, les coordonnées X, Y, Z d'un point quelconque d'une tangente menée par le point M vérifient cette équation qui, étant du premier degré, représente un plan. Elle ne peut, d'ailleurs, se réduire à une identité, l'un au moins des trois binômes

$$x'_u y'_v - y'_u x'_v, \qquad y'_u z'_v - z'_u y'_v, \qquad z'_u x'_v - x'_u x'_v$$

étant différent de zéro (Ch. I, n° 5), puisque le point (x, y, z) est un point simple de la surface. Ce plan contient toutes les tangentes aux diverses courbes tracées sur la surface. On l'appelle *le plan tangent* à la surface en M.

On appelle *tangente* à une surface toute droite tangente à une courbe tracée sur cette surface, ce qui permet d'énoncer ainsi la propriété que nous venons d'établir : *toutes les tangentes en un point simple d'une surface sont situées dans un même plan.* Si donc on connaît deux tangentes particulières en un point simple M d'une surface, le plan tangent en ce point sera le plan déterminé par ces deux tangentes. L'équation (16) n'exprime pas autre chose. Elle représente un plan contenant les tangentes aux deux courbes coordonnées, $v =$ const. et $u =$ const. qui se croisent au point (x, y, z), car x'_u, y'_u, z'_u et x'_v, y'_v, z'_v sont respectivement les coefficients directeurs de ces deux tangentes.

Remarque. — De la propriété du plan tangent résulte immédiatement que *la courbe d'intersection de deux surfaces admet*

pour tangente en chacun de ses points l'intersection des plans tangents aux deux surfaces en ce point; car cette tangente est située à la fois sur les deux plans tangents.

9. Voici deux formes souvent usitées de l'équation du plan tangent. Si l'on prend pour variables deux des coordonnées, x, y par exemple, et qu'on pose $z'_x = p$, $z'_y = q$, les coefficients de l'équation (16) se réduisent respectivement à p, q, -1 et cette équation s'écrit

$$(17) \qquad Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

que les axes soient d'ailleurs rectangulaires ou obliques. Mais, si la surface, au lieu d'être donnée par une équation résolue $z = f(x, y)$, est définie par

$$F(x, y, z) = 0,$$

on a, comme on sait,

$$p = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad q = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

de sorte que l'équation du plan tangent devient

$$(18) \qquad (X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0.$$

En particulier, si le point (x, y, z) est à l'origine, cette équation se réduit à

$$aX + bY + cZ = 0,$$

a, b, c étant les valeurs que prennent à l'origine les dérivées F'_x, F'_y, F'_z; d'où cette règle : *si une surface* $F = 0$ *admet l'origine comme point simple, on obtient l'équation du plan tangent à l'origine en égalant à zéro l'ensemble des termes du premier degré dans le développement de la fonction* F.

A l'équation (17) se rattache une propriété importante du plan tangent :

Théorème. — *Le plan tangent en un point simple* M *d'une surface coupe cette surface suivant une courbe qui a un point double en* M.

Transportons, en effet, l'origine au point M, et prenons pour plan des xy le plan tangent en ce point. Puisque le point M est

un point simple, la coordonnée z de tout point voisin de M sur la surface est développable par la formule de Maclaurin : on aura donc

$$z = p_0 x + q_0 y + \frac{r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2}{2} + \dots$$

Mais, puisque l'équation générale (18) du plan tangent doit se réduire à $z = 0$ quand on y fera $x = y = z = 0$, c'est que les dérivées p et q sont nulles à l'origine, $p_0 = q_0 = 0$. Alors l'équation de la surface se réduit à

$$(19) \qquad z = \frac{r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2}{2} + \dots$$

Si l'on y fait $z = 0$ pour avoir la section déterminée par le plan tangent, on obtient une courbe pour laquelle l'origine est visiblement un point double.

Ainsi, tout plan tangent à une quadrique coupe cette surface suivant deux droites (réelles ou imaginaires), car la section est une conique et présente un point double au point de contact.

10. On appelle *normale* à une surface toute perpendiculaire élevée sur l'un de ses plans tangents en son point de contact. En un point simple (u, v) la normale est unique. Ses coefficients directeurs, relativement à des axes de coordonnées rectangulaires, sont les coefficients mêmes de l'équation du plan tangent. Elle est donc représentée par l'un des trois systèmes

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{X - x}{y'_u z'_v - z'_u y'_v} = \frac{Y - y}{z'_u x'_v - x'_u z'_v} = \frac{Z - z}{x'_u y'_v - y'_u x'_v}, \\ &\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}, \\ &\frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z}, \end{aligned} \right.$$

suivant que l'équation du plan tangent a l'une des formes (16), (17) ou (18).

VI. — Détermination de surfaces par des propriétés du premier ordre.

11. Les propriétés des plans tangents et des normales aux surfaces correspondent à des relations analytiques où interviennent des dérivées partielles du premier ordre. Si donc on cherche à déterminer des surfaces d'après une propriété assignée à ces éléments, on aura à intégrer une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Proposons-nous d'abord de *trouver les surfaces dont tous les plans tangents passent par un point fixe*. Ce point étant pris comme origine, pour que tous les plans tangents

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

passent à l'origine, il faut et il suffit qu'on ait, en tout point (x, y, z) de la surface

$$px + qy = z. \tag{21}$$

Pour intégrer cette équation aux dérivées partielles, on lui associe le système

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

dont deux intégrales distinctes sont

$$\frac{y}{x} = \text{const.}, \qquad \frac{z}{x} = \text{const.}$$

L'intégrale générale s'obtient, comme on sait, en établissant une relation arbitraire entre ces deux intégrales

$$\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

On trouve ainsi *tous les cônes ayant pour sommet le point fixe*.

Il est à peine besoin de faire remarquer que, l'équation d'un cône qui a pour sommet l'origine étant mise sous la forme

$$F(x, y, z) = 0,$$

où F est une fonction homogène de x, y, z, l'équation du plan

tangent en l'un quelconque de ses points se réduit à

$$X F'_x + Y F'_y + Z F'_z = 0.$$

Or, si m est le degré d'homogénéité de la fonction F, on a, quel que soit le facteur λ,

$$F'_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{m-1} F'_x(x, y, z)$$

et les deux relations analogues pour F'_y et F'_z. Donc, le plan tangent au point de coordonnées λx, λy, λz est le même que pour le point (x, y, z), c'est-à-dire que *le plan tangent à un cône est le même tout le long de chaque génératrice.*

Soit encore à *trouver les surfaces dont tous les plans tangents sont parallèles à une droite.* Cette droite étant prise pour axe des z, je dis que l'équation $F(x, y, z) = 0$ de la surface ne doit pas contenir z. En effet, pour que le plan tangent

$$(X - x) F'_x + (Y - y) F'_y + (Z - z) F'_z = 0$$

soit en tout point parallèle à l'axe des z, il faut et il suffit que la dérivée F'_z soit identiquement nulle. On trouve ainsi *tous les cylindres dont les génératrices sont parallèles à la droite donnée.* L'équation du plan tangent ne dépendant pas de z, on voit que *le plan tangent à un cylindre est le même tout le long de chaque génératrice.*

12. Soit, comme autre exemple, à *trouver les surfaces dont toutes les normales rencontrent une droite fixe.* Cette droite étant prise pour axe des z, si l'on écrit que la normale

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$$

rencontre cet axe, on trouve immédiatement

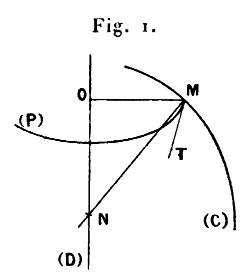
$$py - qx = 0; \tag{22}$$

le premier membre de cette équation est le déterminant fonctionnel de z et de $x^2 + y^2$. Son intégrale générale est donc

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

le symbole φ désignant une fonction arbitraire; elle définit *toutes les surfaces de révolution qui ont pour axe la droite donnée.* On pourrait arriver à la même conclusion par voie géométrique. Appelons (D) la droite donnée, M un point quelconque de la surface, et prenons pour plan de la figure le plan déterminé par M et (D); ce plan coupe la surface suivant une courbe (C) et contient, par hypothèse, la nòrmale en M; il est donc perpendiculaire

Fig. 1.



au plan tangent en M. Menons par M un plan perpendiculaire à (D); il coupe (D) en un point O et la surface suivant une courbe (P) dont la tangente en M est (n° 8, *Rem.*) l'intersection du plan tangent en M avec le plan sécant lui-même; cette tangente MT est, par suite, perpendiculaire au plan de la figure. Si donc on joint OM, cette droite sera normale en M à la section plane (P), de sorte que chaque section de la surface par un plan perpendiculaire à (D) est une courbe dont toutes les normales concourent en un même point O, c'est-à-dire (n° 3) un cercle. La surface est donc engendrée par un cercle dont le plan reste perpendiculaire à la droite (D), dont le centre décrit cette droite et qui rencontre une courbe (C): c'est la définition même des surfaces de révolution.

VII. — Élément linéaire des surfaces; angle de deux directions.

13. Une surface étant définie par les formules

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v),$$

nous avons vu (n° 8) que si l'on établit une dépendance convenable entre u et v, ou si l'on considère ces deux paramètres comme des fonctions d'une nouvelle variable t, les formules précédentes déterminent une courbe tracée sur la surface. D'après la théorie exposée au n° 5, l'élément d'arc ds de cette courbe sera donnée par la relation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

où les axes sont supposés rectangulaires. Mais, si l'on porte les différentielles

$$dx = x'_u du + x'_v dv, \qquad dy = y'_u du + y'_v dv, \qquad dz = z'_u du + z'_v dv,$$

dans l'expression précédente, on trouvera

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2, \tag{23}$$

en posant, suivant les notations de Gauss,

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{E} = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u = \Sigma x'^2_u, \\ \mathrm{F} = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = \Sigma x'_u x'_v, \\ \mathrm{G} = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v = \Sigma x'^2_v. \end{array}\right. \tag{24}$$

Il faudrait encore remplacer du par $u'\,dt$ et dv par $v'\,dt$, mais on préfère laisser dans le résultat subsister ces différentielles. On a ainsi en (23) une forme quadratique par rapport à du, dv, qui représente la partie principale du carré de la distance de deux points voisins (u, v), $(u + du, v + dv)$ sur la surface. Cette forme intervenant dans beaucoup plus de questions que sa racine carrée, c'est elle que nous appellerons *l'élément linéaire* de la surface (ou encore la *première forme fondamentale* relative à la surface). Ses coefficients E, F, G sont dits *coefficients de l'élément linéaire*. D'après sa signification géométrique cette forme est toujours positive, du moins quand on ne considère que des points

réels de la surface et qu'on les suppose donnés par des valeurs réelles de u et de v. En effet, dans ces conditions, les coefficients E et G sont positifs et le discriminant $F^2 - EG$ est négatif en vertu de l'identité

$$(25)\quad \begin{cases} EG - F^2 = (\Sigma x_u'^2)(\Sigma x_v'^2) - (\Sigma x_u' x_v')^2 \\ \qquad = (y_u' z_v' - z_u' y_v')^2 + (z_u' x_v' - x_u' z_v')^2 + (x_u' y_v' - y_u' x_v')^2. \end{cases}$$

Pour rappeler ce fait, on pose

$$(26)\qquad H^2 = EG - F^2, \qquad H = +\sqrt{EG - F^2},$$

en convenant que H représentera toujours la valeur arithmétique du radical.

Ce radical figure dans l'expression des cosinus directeurs a, b, c de la normale à une surface. On a, en effet, d'après ce qui a été dit au n° 10,

$$\frac{a}{y_u' z_v' - z_u' y_v'} = \frac{b}{z_u' x_v' - x_u z_v'} = \frac{c}{x_u' y_v' - y_u' x_v'}.$$

La valeur commune de ces rapports est égale, au signe près, à l'inverse de H. Nous choisirons la direction définie par les formules

$$(27)\quad a = \frac{y_u' z_v' - z_u' y_v'}{H}, \qquad b = \frac{z_u' x_v' - x_u' z_v'}{H}, \qquad c = \frac{x_u' y_v' - y_u' x_v'}{H},$$

que nous considérerons ultérieurement sous le nom de *direction positive* de la normale.

14. Cherchons le cosinus de l'angle ω que font entre elles les deux lignes coordonnées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ qui se croisent en un point de la surface. Si, dans la forme (23), on fait successivement $dv = 0$ et $du = 0$, on voit que $\sqrt{E}\,du$ et $\sqrt{G}\,dv$ sont respectivement les éléments d'arcs des courbes coordonnées $v = \text{const.}$ et $u = \text{const.}$ Les cosinus directeurs des tangentes à ces deux courbes sont donc

$$\frac{x_u'}{\sqrt{E}}, \quad \frac{y_u'}{\sqrt{E}}, \quad \frac{z_u'}{\sqrt{E}}; \qquad \frac{x_v'}{\sqrt{G}}, \quad \frac{y_v'}{\sqrt{G}}, \quad \frac{z_v'}{\sqrt{G}}.$$

On conclut de là

$$(28)\qquad \cos\omega = \frac{x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v'}{\sqrt{EG}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Donc, *pour que les courbes coordonnées se coupent à angle droit en tout point de la surface, il faut et il suffit que* F *soit identiquement nul.* On dit alors que les lignes coordonnées sont *orthogonales.*

Plus généralement, considérons deux courbes passant en un point (u, v) d'une surface; pour chacune d'elles u et v seront (n° 8) des fonctions d'un paramètre. Soient du, dv, ds pour l'une, δu, δv, δs pour l'autre, les différentielles des coordonnées curvilignes et de l'arc. On aura

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$
$$\delta s^2 = \mathrm{E}\,\delta u^2 + 2\mathrm{F}\,\delta u\,\delta v + \mathrm{G}\,\delta v^2.$$

Les cosinus directeurs des tangentes à ces deux courbes auront respectivement pour expressions

$$l = \frac{x'_u\,du + x'_v\,dv}{ds}, \qquad m = \frac{y'_u\,du + y'_v\,dv}{ds}, \qquad n = \frac{z'_u\,du + z'_v\,dv}{ds},$$
$$\lambda = \frac{x'_u\,\delta u + x'_v\,\delta v}{\delta s}, \qquad \mu = \frac{y'_u\,\delta u + y'_v\,\delta v}{\delta s}, \qquad \nu = \frac{z'_u\,\delta u + z'_v\,\delta v}{\delta s}.$$

L'angle ϖ de ces deux tangentes est déterminé par la formule

$$\cos\varpi = \lambda l + \mu m + \nu n.$$

En effectuant les calculs on trouve

$$(29) \qquad \cos\varpi = \frac{\mathrm{E}\,du\,\delta u + \mathrm{F}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{G}\,dv\,\delta v}{ds\,\delta s}.$$

C'est l'angle ϖ ainsi défini que l'on appelle, pour abréger, *l'angle des deux directions* (du, dv), $(\delta u, \delta v)$.

CHAPITRE III.

FAMILLES DE COURBES ET DE SURFACES. TRAJECTOIRES ET ENVELOPPES; SURFACES DÉVELOPPABLES.

I. — Familles de courbes et de surfaces.

1. On ne saurait faire l'étude d'une courbe ou d'une surface déterminée sans lui associer certaines *familles* de courbes ou de surfaces.

Une *famille* de courbes ou de surfaces est l'ensemble des courbes ou des surfaces représentées par une équation ou un système d'équations contenant *un paramètre* de plus qu'il n'est nécessaire pour définir entièrement une courbe ou une surface.

Ainsi, dans le plan, une famille de courbes pourra être représentée, soit par une équation

$$F(x, y, \tau) = 0,$$

soit par un système d'équations

$$x = f_1(u, \tau), \qquad y = f_2(u, \tau),$$

où τ est un paramètre variable. A chaque valeur de τ correspond généralement une courbe ou un nombre limité de courbes de la famille. Ainsi, les tangentes aux divers points d'une courbe plane forment une famille de droites; elles dépendent d'un paramètre, par exemple l'abscisse de leur point de contact. A chaque valeur τ de cette abscisse correspondent autant de tangentes que la droite $x = \tau$ coupe de fois la courbe.

Dans l'espace, une famille de courbes sera représentée, soit par deux équations

$$F_1(x, y, z, \tau) = 0, \qquad F_2(x, y, z, \tau) = 0,$$

contenant un paramètre variable τ, soit par trois équations

$$x = f_1(u, \tau), \qquad y = f_2(u, \tau), \qquad z = f_3(u, \tau).$$

Tel est le cas des tangentes aux divers points d'une courbe gauche.

On voit que, *dans l'espace, les courbes d'une famille forment une surface;* car l'élimination de τ entre les deux équations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ donnerait une relation qui serait vérifiée par les coordonnées x, y, z de tous les points des diverses courbes de la famille. C'est ce qui résulte aussi des expressions de x, y, z où figurent deux paramètres u et τ. En particulier, toute famille de droites forme une surface, qu'on appelle *surface réglée*.

Une famille de surfaces est représentée, soit par une équation

$$F(x, y, z, \tau) = 0,$$

soit par trois équations

$$x = f_1(u, v, \tau), \qquad y = f_2(u, v, \tau), \qquad z = f_3(u, v, \tau),$$

contenant un paramètre variable τ. Par exemple, les plans normaux à une courbe plane ou gauche forment une famille.

On appelle *trajectoire* d'une famille de courbes une courbe qui coupe toutes celles de la famille sous un angle constant; suivant que cet angle est ou n'est pas droit, la trajectoire est dite *orthogonale* ou *oblique*.

II. — Trajectoires d'une famille de courbes planes.

2. Considérons d'abord une famille de courbes tracées sur un plan, rapportées à des axes rectangulaires et représentées par une équation de la forme

$$(F) \qquad F(x, y, \tau) = 0,$$

où τ est un paramètre variable. Il s'agit de trouver sur chacune des courbes (F) un point M tel que le lieu de ces divers points coupe toutes les courbes de la famille sous un angle dont la tangente est donnée et égale à k. Les coordonnées (x, y) de ce point M sont évidemment des fonctions de τ qui satisfont à l'équation (F). Soient x', y' leurs dérivées par rapport à τ; le coefficient

angulaire de la tangente en M à la trajectoire qui passe par ce point est le rapport $y':x'$. Celui de la tangente à la courbe (F) en ce même point étant désigné par μ, on aura, par hypothèse,

$$k = \frac{y' - \mu x'}{x' + \mu y'}, \qquad \mu = -\frac{F'_x}{F'_y},$$

ou, en éliminant μ,

$$(k) \qquad k = \frac{x' F'_x + y' F'_y}{x' F'_y - y' F'_x}.$$

On est donc ramené à déterminer deux fonctions x et y de la variable τ, qui satisfont à la fois à l'équation finie (F) et à l'équation différentielle (k). Comme cette dernière est homogène par rapport aux dérivées x' et y', si l'on peut éliminer τ entre les équations (F) et (k), on arrivera à une relation de la forme

$$\Phi\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Ce sera l'*équation différentielle* des trajectoires cherchées. Mais, le plus souvent, l'élimination de τ ne sera pas possible et l'on devra garder le système (F) et (k). Nous allons donner un exemple de chacune de ces circonstances.

Remarquons, au préalable, que, dans le cas des trajectoires *orthogonales,* l'équation (k) se réduit à

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\mu} = \frac{F'_y}{F'_x}.$$

On formera l'équation différentielle des trajectoires orthogonales en éliminant τ entre cette relation et l'équation (F).

3. *Premier exemple.* — Soit à *trouver les trajectoires orthogonales des paraboles qui ont même axe et même sommet.* Ici nous avons

$$(F) \qquad F = y^2 - 2px = 0,$$

et, en vertu de la remarque précédente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F'_y}{F'_x} = -\frac{y}{p}. \qquad (k)$$

L'élimination de p entre les équations (F) et (k) donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}.$$

Telle est l'équation différentielle des trajectoires cherchées. On peut l'écrire

$$2x\,dx + y\,dy = 0.$$

Son intégrale générale est donc

$$2x^2 + y^2 = \text{const.}$$

Elle représente une famille d'ellipses concentriques.

4. *Second exemple.* — Cherchons les trajectoires orthogonales d'une famille *quelconque* de cercles ayant leurs centres sur une droite. Prenons cette droite pour axe des x; soit v l'abscisse du centre C d'un des cercles; son rayon sera une fonction arbitraire de v. Soit donc

$$(x-v)^2 + y^2 - \frac{1}{V'^2} = 0 \qquad (1)$$

l'équation d'une des familles considérées. La fonction $V(v)$ dont la dérivée figure dans cette équation restant arbitraire, nous devrons chercher à déterminer séparément les coordonnées x et y des trajectoires cherchées.

La relation propre aux trajectoires orthogonales, donnée plus haut,

$$\frac{y'_v}{x'_v} = \frac{F'_y}{F'_x},$$

devient ici

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x-v}. \qquad (2)$$

Pour intégrer les équations (1) et (2), nous égalerons ces derniers rapports à une nouvelle fonction inconnue $-W^{-1}$. Nous aurons ainsi

$$x = v - Wy, \qquad x' = -Wy'.$$

Si l'on différentie par rapport à v la première de ces formules en tenant compte de la seconde, on trouve $W'y - 1 = 0$; on a donc

$$y = \frac{1}{W'}, \qquad x - v = -\frac{W}{W'}.$$

Substituons ces expressions dans l'équation des cercles; il vient

$$\frac{W^2+1}{W'^2} = \frac{1}{V'^2},$$

ce qu'on peut écrire

$$(3) \qquad \frac{W'}{\sqrt{W^2+1}} = V'.$$

Si l'on désigne par $\mathrm{Sh}\,\omega$ et $\mathrm{Ch}\,\omega$ les *sinus* et *cosinus hyperboliques* de ω,

$$\mathrm{Sh}\,\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2}, \qquad \mathrm{Ch}\,\omega = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2},$$

qui satisfont, comme on sait, aux relations

$$\mathrm{Ch}^2\omega - \mathrm{Sh}^2\omega = 1,$$

$$\frac{d}{d\omega}\,\mathrm{Ch}\,\omega = \mathrm{Sh}\,\omega, \qquad \frac{d}{d\omega}\,\mathrm{Sh}\,\omega = \mathrm{Ch}\,\omega,$$

l'équation (3) a pour intégrale générale

$$W = \pm\,\mathrm{Sh}(V - c)$$

avec une constante arbitraire c. Par suite, les coordonnées des trajectoires orthogonales des cercles (1) ont pour expressions

$$y = \frac{\pm 1}{V'\,\mathrm{Ch}(V-c)}, \qquad x = v - \frac{\mathrm{Sh}(V-c)}{V'\,\mathrm{Ch}(V-c)}.$$

Dans le cas particulier où les cercles donnés ont tous le même rayon R, la fonction V se réduit à $v : R$ et, si l'on pose

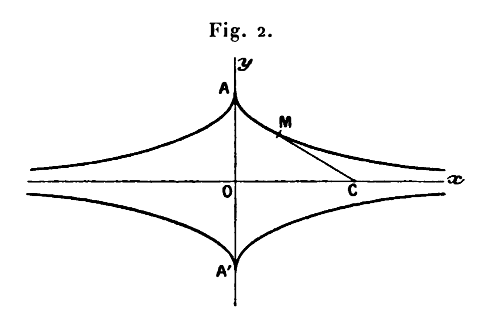
$$\frac{v}{R} - c = w,$$

les formules précédentes deviennent

$$y = \frac{\pm R}{\mathrm{Ch}\,w}, \qquad x = Rw - R\,\frac{\mathrm{Sh}\,w}{\mathrm{Ch}\,w} + cR.$$

Elles représentent la même courbe, déplacée parallèlement à l'axe des x, résultat évident *a priori*. Cette courbe, qui a la forme ci-dessous, est appelée *tractrice* ou *courbe aux tangentes égales*.

Fig. 2.



En effet, la tangente en chacun de ses points M va passer au centre C de l'un des cercles de la famille et, si on la limite à l'axe des x, c'est-à-dire au point C, elle aura pour longueur R.

5. Supposons maintenant que les courbes dont on cherche les trajectoires soient définies par une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x, y)$$

entre leurs coordonnées, supposées toujours rectangulaires. Dans la formule générale

$$k = \frac{y' - \mu x'}{x' + \mu y'},$$

nous n'aurons qu'à remplacer μ, coefficient angulaire de la tangente à une courbe de la famille, par $\psi(x, y)$ qui a précisément la même signification, pour obtenir l'équation différentielle

$$k = \frac{dy - \psi(x, y)\,dx}{dx + \psi(x, y)\,dy}$$

des trajectoires cherchées.

En particulier, pour les trajectoires *orthogonales*, k étant infini, il vient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\psi(x, y)}.$$

C'est *l'équation différentielle des courbes de la famille, dans*

laquelle on a remplacé la dérivée par son inverse, changé de signe. En conséquence, si une famille de courbes est définie par l'équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

ses trajectoires orthogonales seront définies par cette autre

$$F\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0.$$

Soit pour exemple la famille de paraboles

$$(v) \qquad y^2 + 2vx - v^2 = 0,$$

dont l'équation différentielle est

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\frac{dy}{dx} - y^2 = 0.$$

Cette équation a ses deux racines y' inverses et de signes contraires; elle ne changera donc pas si l'on remplace y' par son inverse changé de signe. C'est, par conséquent, aussi l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des paraboles (v). On s'explique ce fait en remarquant que par tout point du plan passent deux paraboles de la famille. Car, si l'on considère x et y comme des constantes données, l'équation (v) admet deux racines v_1 et v_2; de plus, on a $v_1 v_2 = -y^2$. Or les coefficients angulaires des tangentes aux deux paraboles ont respectivement pour valeurs

$$y'_1 = \frac{v_1}{y}, \qquad y'_2 = \frac{v_2}{y}.$$

En conséquence, on a $y'_1 y'_2 = -1$; c'est-à-dire que les deux paraboles de la famille qui passent par un point du plan s'y coupent sous un angle droit.

Il serait d'ailleurs facile d'intégrer l'équation différentielle ci-dessus, qui est une équation homogène. On trouverait, pour son intégrale générale, l'équation

$$(u) \qquad y^2 + 2ux - u^2 = 0,$$

qui ne diffère de l'équation (v) que par le nom de la constante arbitraire.

III. — Trajectoires orthogonales d'une famille de courbes tracées sur une surface.

6. On a parfois à *chercher les trajectoires orthogonales d'une famille de courbes tracées sur une surface*. Supposons la surface rapportée à des coordonnées curvilignes (u, v) et la famille de courbes définie par une équation

$$\varpi(u, v) = \tau,$$

résolue par rapport au paramètre variable τ. L'élément linéaire de la surface étant

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

on a trouvé (Ch. II, n° **14**), pour exprimer l'orthogonalité de deux directions (du, dv) et $(\delta u, \delta v)$, la condition

$$(4) \qquad \mathrm{E}\,du\,\delta u + \mathrm{F}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{G}\,dv\,\delta v = 0.$$

Soit $(\delta u, \delta v)$ la direction de la tangente à l'une des courbes de la famille $\varpi = \tau$. On aura

$$\varpi'_u\,\delta u + \varpi'_v\,\delta v = 0.$$

Si (du, dv) est la direction de la tangente à la trajectoire orthogonale qui passe par le point (u, v), on aura l'équation différentielle de cette trajectoire en remplaçant δu par ϖ'_v et δv par $-\varpi'_u$ dans la condition (4). On trouve ainsi

$$(\mathrm{E}\varpi'_v - \mathrm{F}\varpi'_u)\,du + (\mathrm{F}\varpi'_v - \mathrm{G}\varpi'_u)\,dv = 0.$$

Remarquons que, si la famille de courbes est définie par une équation différentielle

$$\mathrm{M}\,\delta u + \mathrm{N}\,\delta v = 0,$$

il suffira de remplacer δu et δv respectivement par N et — M dans la condition d'orthogonalité (4) pour obtenir l'équation

$$(\mathrm{EN} - \mathrm{FM})\,du + (\mathrm{FN} - \mathrm{GM})\,dv = 0$$

des trajectoires orthogonales cherchées.

Dans le cas particulier où l'on veut avoir les trajectoires orthogonales des courbes $v =$ const., on devra, dans la condition (4),

supposer $\delta v = 0$ et δu quelconque; par suite

$$E\,du + F\,dv = 0$$

sera l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes $v = \text{const.}$

7. *Exemple.* — Considérons les droites qui rencontrent à angle droit une hélice circulaire et son axe. Ces droites forment une surface appelée *hélicoïde à plan directeur,* parce qu'elles sont toutes parallèles à un plan de section droite du cylindre qui porte l'hélice. Prenons pour plan des xy l'un de ces plans; pour axe des z l'axe de l'hélice; pour axe des x la droite du plan $z = 0$ qui rencontre l'hélice; pour axe des y une droite perpendiculaire à Ox. D'après sa définition, l'hélicoïde est engendré par une droite qui s'appuie sur Oz en lui restant perpendiculaire, et s'éloigne du plan xOy d'une longueur hv pendant qu'elle tourne de l'angle v autour de Oz. Les équations d'une génératrice sont donc

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} v, \qquad z = hv;$$

celles de la surface sont

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = hv.$$

Un calcul facile donne, pour l'élément linéaire,

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + h^2)\,dv^2.$$

On voit que le coefficient F est nul. En conséquence, l'équation des trajectoires orthogonales des génératrices ($v = \text{const.}$) se réduit à $du = 0$. Son intégrale

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const.}$$

représente tous les cylindres de révolution qui ont même axe que celui qui porte l'hélice. Les trajectoires cherchées, étant les intersections de ces cylindres avec l'hélicoïde, sont évidemment des hélices ayant même axe et même pas que l'hélice donnée.

Ce résultat était facile à prévoir sans calcul. Toutes ces hélices, en effet, se projettent sur le plan xOy suivant un cercle ayant l'origine pour centre; toute tangente à l'une d'elles se projette suivant une tangente à ce cercle. L'angle HMT, formé par l'une

de ses tangentes MT et la génératrice HM de l'hélicoïde, se projette donc suivant un angle droit Omt. Or son côté HM est parallèle au plan de projection xOy. Par suite, cet angle est droit et les hélices considérées sont bien les trajectoires orthogonales des droites considérées.

8. *Remarque.* — Toute famille de courbes *tracées dans l'espace* formant nécessairement une surface, le problème des trajectoires orthogonales d'une pareille famille est identique à celui qui vient de nous occuper. Mais, comme la famille de courbes peut être considérée indépendamment de la surface qu'elle engendre, nous opérerons directement la recherche des trajectoires orthogonales. Soit donc une famille de courbes représentée par les équations

$$(\tau) \qquad x = f_1(u, \tau), \qquad y = f_2(u, \tau), \qquad z = f_3(u, \tau).$$

Il faut trouver sur chaque courbe (τ) un point M tel que le lieu de ces divers points coupe à angle droit toutes les courbes de la famille. Les coordonnées (x, y, z) de ce point sont des fonctions de τ qu'on peut considérer comme représentées par les formules (τ) sous la condition que u soit une fonction convenablement choisie de τ. Si du désigne sa différentielle, les coefficients directeurs de la tangente à l'une des trajectoires pourront être pris égaux à

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} du + \frac{\partial f_1}{\partial \tau} d\tau, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} du + \frac{\partial f_2}{\partial \tau} d\tau, \qquad \frac{\partial f_3}{\partial u} du + \frac{\partial f_3}{\partial \tau} d\tau,$$

tandis que ceux de l'une des courbes de la famille, τ étant fixe, sont

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial u}.$$

En exprimant l'orthogonalité des deux directions, on obtient

$$du \sum \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + d\tau \sum \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0.$$

C'est, aux notations près, l'équation $E\,du + F\,dv = 0$ du n° 6.

Tout ce qui précède s'applique évidemment aux trajectoires d'une famille de courbes situées dans un plan : il n'y a qu'à supposer la fonction f_3 identiquement nulle.

IV. — Enveloppe d'une famille de courbes.

9. Étant donnée une famille de courbes tracées sur un plan, cherchons s'il existe une courbe qui soit tangente à toutes les courbes de la famille.

Supposons qu'il existe une pareille courbe, qu'on appellera courbe *enveloppe;* chacune des courbes de la famille

$$(F) \qquad F(x, y, \tau) = 0$$

sera dite une *enveloppée*. Par hypothèse, chaque enveloppée présente au moins un point M tel que le lieu de ces divers points est une courbe qui la touche en M. Les coordonnées (x, y) de ce point M sont des fonctions de τ qui satisfont à l'équation (F); soient x' et y' leurs dérivées. Le coefficient angulaire de la tangente est $-F'_x : F'_y$. D'où l'équation

$$x'F'_x + y'F'_y = 0.$$

Mais si l'on différentie l'équation (F) en considérant x et y comme des fonctions de τ, on a

$$(5) \qquad x'F'_x + y'F'_y + F'_\tau = 0.$$

En vertu de cette identité, l'équation précédente se réduit à

$$(e) \qquad F'_\tau = 0.$$

Ainsi les coordonnées x, y des points de l'enveloppe sont déterminées par le système (F), (e). En d'autres termes, *une famille de courbes planes étant définie par une équation* $F(x, y, \tau) = 0$ *qui dépend d'un paramètre* τ, *pour déterminer l'enveloppe de ces courbes quand elle existe, on associe à l'équation de la famille son équation dérivée* $F'_\tau = 0$.

Il est évident que l'enveloppe n'existe que si ces deux équations ne sont pas contradictoires. Même dans ce cas, il peut arriver que la courbe définie par le système (F), (e) soit non pas une enveloppe, mais un lieu de points multiples. En effet, si, pour une succession continue de valeurs de τ, l'équation (F) représente des courbes admettant un point multiple, les coordonnées de ce point

seront des fonctions de τ qui satisferont à la fois aux trois équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad F'_x = 0, \qquad F'_y = 0;$$

par suite, elles vérifieront, à cause de l'identité (5), les deux équations (F) et (e).

Nous n'insisterons pas sur les enveloppes des courbes planes, dont la théorie est élémentaire. Nous établirons seulement leur propriété essentielle, qui nous servira plus tard.

Théorème. — *L'enveloppe d'une famille de courbes tracées sur un plan est le lieu des positions limites des points communs à deux enveloppées successives.*

En effet, les coordonnées des points communs à deux enveloppées voisines satisfont aux deux équations

$$F(x, y, \tau) = 0, \qquad F(x, y, \tau + \Delta\tau) = 0.$$

Ce système, visiblement équivalent au suivant

$$F = 0, \qquad \frac{F(x, y, \tau + \Delta\tau) - F(x, y, \tau)}{\Delta\tau} = 0,$$

se réduit précisément, quand $\Delta\tau$ devient nul, au système (F), (e) qui définit l'enveloppe.

10. D'après ce qui précède, *il existe généralement* une courbe tangente à une famille de courbes tracées sur un plan; nous allons voir qu'au contraire *il n'existe généralement pas* de courbe tangente à une famille de courbes tracées dans l'espace.

Considérons une pareille famille définie par deux équations

$$(\tau) \qquad F_1(x, y, z, \tau) = 0, \qquad F_2(x, y, z, \tau) = 0.$$

Si l'enveloppe existe, les coordonnées de ses points M seront des fonctions de τ qui vérifieront ces deux équations. Leurs dérivées x', y', z' pourront être prises pour les coefficients directeurs α, β, γ de la tangente à l'enveloppe. Si donc on différentie les deux équations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ par rapport à τ, on aura les identités

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha \frac{\partial F_1}{\partial x} + \beta \frac{\partial F_1}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial \tau} = 0, \\ \alpha \frac{\partial F_2}{\partial x} + \beta \frac{\partial F_2}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial \tau} = 0, \end{aligned} \right.$$

Or, l'enveloppe est tangente en M à l'une des envèloppées, celle qui correspond à la même valeur de τ que le point M; par suite, les coefficients directeurs α, β, γ satisfont aux équations

$$\alpha \frac{\partial F_1}{\partial x} + \beta \frac{\partial F_1}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0,$$

$$\alpha \frac{\partial F_2}{\partial x} + \beta \frac{\partial F_2}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0.$$

De ces équations et des identités (6) il résulte que les fonctions cherchées x, y, z du paramètre τ doivent vérifier non seulement les deux équations (τ), mais aussi les deux équations dérivées

$$\frac{\partial F_1}{\partial \tau} = 0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial \tau} = 0.$$

En conséquence, *pour qu'une famille de courbes de l'espace, représentées par deux équations*

$$F_1(x, y, z, \tau) = 0, \qquad F_2(x, y, z, \tau) = 0,$$

qui dépendent d'un paramètre τ, admette une enveloppe, il faut que ces deux équations et leurs équations dérivées

$$\frac{\partial F_1}{\partial \tau} = 0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial \tau} = 0$$

admettent des solutions communes en x, y, z pour une succession continue de valeurs de τ.

Il n'en est généralement pas ainsi, de sorte qu'il n'y a pas d'enveloppe. Quand le système ci-dessus se réduit à trois équations distinctes, il définit une courbe qui est généralement tangente à toutes les courbes de la famille (*courbe enveloppe*). Nous indiquerons, à propos des surfaces enveloppes (n° 15), un cas étendu où une famille de courbes tracées dans l'espace admet une enveloppe.

11. Nous allons supposer maintenant que les courbes de la famille considérée soient définies par trois équations de la forme

$$x = f_1(u, \tau), \qquad y = f_2(u, \tau), \qquad z = f_3(u, \tau).$$

Les coordonnées x, y, z des points M de l'enveloppe sont des fonctions de τ qu'on peut supposer représentées par ces trois for-

mules, à condition que u soit une fonction convenablement déterminée de τ et réciproquement τ une certaine fonction de u. Leurs dérivées, prises dans cette hypothèse et dans celle où τ est constant, doivent avoir des valeurs proportionnelles, puisqu'il y a contact entre l'enveloppe et une enveloppée au point M. On doit donc avoir

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial \tau}\frac{d\tau}{du}}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial \tau}\frac{d\tau}{du}}{\frac{\partial y}{\partial u}}=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial \tau}\frac{d\tau}{du}}{\frac{\partial z}{\partial u}},$$

équations qui se réduisent visiblement aux suivantes

$$(7) \qquad \frac{x'_\tau}{x'_u}=\frac{y'_\tau}{y'_u}=\frac{z'_\tau}{z'_u}.$$

L'enveloppe n'existera donc que si ces deux équations définissent pour τ la même fonction de u. S'il en est ainsi, soit $\tau=\varphi(u)$ cette fonction; les équations

$$x=f_1(u,\varphi),\qquad y=f_2(u,\varphi),\qquad z=f_3(u,\varphi)$$

représenteront une courbe qui sera généralement tangente à toutes les courbes considérées.

Remarque I. — La solution que nous venons d'exposer convient aux familles de courbes tracées sur un plan et représentées par des équations de la forme

$$x=f_1(u,\tau),\qquad y=f_2(u,\tau).$$

Il suffit de supposer la fonction f_3 identiquement nulle; l'enveloppe est alors définie par les équations

$$x=f_1(u,\tau),\qquad y=f_2(u,\tau),\qquad \frac{x'_\tau}{x'_u}=\frac{y'_\tau}{y'_u}.$$

La condition d'existence de cette courbe disparaît avec le dernier des rapports (7).

Remarque II. — Si la famille de courbes est définie par deux de ses cylindres projetants

$$x=f_1(u,\tau),\qquad y=f_2(u,\tau),\qquad z=u,$$

les relations (7) entraîneront

$$x'_\tau = 0, \qquad y'_\tau = 0.$$

Il faudra que ces deux équations donnent pour u, c'est-à-dire pour z, la même fonction de τ.

V. — Enveloppe d'une famille de droites.

12. Supposons d'abord les droites représentées par les deux équations

(8) $$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

où a, b, p, q sont des fonctions d'un paramètre τ; d'après la remarque précédente, il faudra pour l'existence de l'enveloppe que les deux équations

(9) $$a'z + p' = 0, \qquad b'z + q' = 0$$

donnent la même expression de z. Les dérivées des fonctions a, b, p, q devront donc vérifier l'identité

(10) $$a'q' - b'p' = 0.$$

Alors les formules (8), jointes à l'équation

(9)′ $$z = -\frac{p'}{a'} = -\frac{q'}{b'},$$

représenteront une courbe qui sera tangente à toutes les droites de la famille; car elle ne peut pas être un lieu de points multiples, la droite ne présentant pas de pareils points.

Si les deux fonctions a et b se réduisent à des constantes, les formules (9)′ donnent pour z une valeur infinie. Il n'y a pas alors à proprement parler d'enveloppe. Mais, d'après l'hypothèse même, les droites de la famille sont parallèles à la droite fixe $x = az$, $y = bz$. Elles forment un cylindre; on dit encore qu'elles ont une enveloppe, mais que cette enveloppe est rejetée à l'infini.

Soit maintenant une famille de droites représentées par les formules générales

(11) $$x = \xi + \lambda u, \qquad y = \eta + \mu u, \qquad z = \zeta + \nu u,$$

où ξ, η, ζ, ainsi que λ, μ, ν, sont des fonctions d'un paramètre τ. Désignant leurs dérivées par des lettres accentuées, nous formerons les équations (7), savoir

$$(12) \qquad \frac{\xi'+\lambda' u}{\lambda} = \frac{\eta'+\mu' u}{\mu} = \frac{\zeta'+\nu' u}{\nu},$$

qui doivent donner la même expression de u. Pour exprimer cette condition, appelons ρ la valeur commune des trois rapports. Nous avons ainsi trois équations du premier degré en u et ρ qui doivent être compatibles. Il faut et il suffit pour cela que leur déterminant soit nul

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} \xi' & \lambda' & \lambda \\ \eta' & \mu' & \mu \\ \zeta' & \nu' & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

On aura l'expression cherchée de u en résolvant, par rapport à u et à ρ, deux des trois équations qui viennent d'être considérées. Dans le cas particulier où λ, μ, ν sont des cosinus directeurs, on a

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 1, \qquad \lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu' = 0.$$

En tenant compte de ces deux identités, on tire aisément des rapports (12) la valeur de u

$$(14) \qquad u = -\frac{\lambda'\xi'+\mu'\eta'+\nu'\zeta'}{\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2}.$$

Sous la condition (13) l'enveloppe existe; elle est représentée par les formules (11) où l'on remplace u par l'expression (14).

13. *Définition.* — Toute famille de droites forme, comme il a été vu au n° 1, une surface qu'on appelle *surface réglée,* et dont les droites sont dites les *génératrices.* On vient d'établir que les génératrices d'une surface réglée n'ont pas en général d'enveloppe. On dit alors que la surface qu'elles forment est une surface *gauche.* Au contraire, lorsqu'elles sont parallèles entre elles ou toutes tangentes à une courbe, le lieu reçoit le nom de *surface développable;* leur enveloppe est appelée *arête de rebroussement de la surface.* Nous reviendrons dans la suite de ce Chapitre sur les surfaces développables. Remarquons seulement que, si l'arête de rebroussement est plane, la développable dégénère en

un plan; si elle se réduit à un point, la développable est un cône, ou un cylindre si le point est rejeté à l'infini.

VI. — Surfaces enveloppes.

14. Étant donné un *système simplement infini* de surfaces dont la forme et la position dépendent d'un paramètre variable τ, ce que nous avons appelé une *famille* de surfaces, on peut se demander s'il existe une surface qui soit tangente à toutes celles de cette famille. Mais la même question se pose aussi au sujet d'un *système doublement infini* de surfaces : on entend par là un ensemble de surfaces dont la forme et la position dépendent de deux paramètres. Dans le premier cas, on dit qu'il s'agit d'une *enveloppe à un paramètre;* dans le second, d'une *enveloppe à deux paramètres.*

Considérons d'abord un système simplement infini de surfaces (S) et concevons qu'il existe une surface (Σ) qui les touche toutes, chaque point de (Σ) étant supposé être un point de contact avec l'une des surfaces (S). L'*enveloppe* (Σ) et chacune des *enveloppées* (S) seront *nécessairement tangentes tout le long d'une courbe.* Car, si elles n'avaient de contact qu'en des points séparés les uns des autres par des intervalles finis, ces groupes de points, dont chacun dépend de la valeur particulière du paramètre à laquelle correspond la surface considérée (S), ne formeraient par leur ensemble que des courbes, en nombre fini ou infini, séparées les unes des autres par des intervalles finis, au lieu de recouvrir *entièrement* une surface, comme nous le supposons.

15. Théorème. — *L'enveloppe d'une famille de surfaces est le lieu des positions limites des intersections de deux enveloppées voisines.*

Admettons toujours l'existence d'une surface enveloppe (Σ); nous savons que (Σ) touche chaque enveloppée (S) tout le long d'une courbe (τ). Considérons une suite continue de plans (P) dont chacun rencontrera la courbe (C), par exemple, la famille des plans normaux à cette courbe. Tout plan (P) coupe les enveloppées (S) suivant une famille de courbes planes (C), toutes

tangentes, par hypothèse, à la section (Γ) qu'il détermine dans l'enveloppe (Σ). Le point M, où il rencontre la courbe (τ), est le point de contact de l'une des courbes (C) section de la surface (S), avec la courbe enveloppe (Γ). Ce point est (n° 9) la position limite d'un point commun à la courbe (C) et à la courbe voisine, quand celle-ci tend vers (C). En conséquence, la courbe (τ), lieu de ses points M, est bien la position limite de l'intersection de l'enveloppée (S) et de l'enveloppée voisine.

Or il est certain que cette courbe limite existe en général sur chaque enveloppée. En effet, la famille étant représentée par une équation

$$F(x, y, z, \tau) = 0, \tag{15}$$

qui contient un paramètre variable τ, à deux valeurs τ et $\tau + \Delta\tau$ de ce paramètre correspondront deux surfaces qui, en général, se couperont suivant une courbe définie par les équations

$$F(x, y, z, \tau) = 0, \qquad F(x, y, z), \tau + \Delta\tau) = 0.$$

Ce système étant équivalent au suivant

$$F = 0, \qquad \frac{F(x, y, z, \tau + \Delta\tau) - F(x, y, z, \tau)}{\Delta\tau} = 0,$$

on voit que, quand $\Delta\tau$ tend vers zéro, la courbe commune tend vers celle que représentent les deux équations

$$F(x, y, z, \tau) = 0, \qquad F'_\tau(x, y, z, \tau) = 0. \tag{16}$$

Nous appellerons cette courbe la *caractéristique* de la surface (S) qui correspond à la valeur considérée de τ. Le lieu des caractéristiques est une surface (Σ). Il suffit de considérer les sections faites dans cette surface et dans les surfaces (S) par les plans normaux aux divers points d'une caractéristique pour voir qu'elle est tangente à chacune des surfaces (S) tout le long d'une caractéristique.

Pour établir analytiquement ce résultat, donnons à τ une valeur fixe dans l'équation (15). Le plan tangent en un point de la surace (S) ainsi obtenue est déterminé par les valeurs des coefficients p, q, -1, dont les deux premiers satisfont aux équations

$$pF'_z + F'_x = 0, \qquad qF'_z + F'_y = 0.$$

La surface (Σ) est représentée par l'équation $F = 0$, dans laquelle τ est censé remplacé par son expression en x, y, z, tirée de $F'_\tau = 0$. Soient p_1 et q_1 les dérivées par rapport à x et à y de la coordonnée z de cette surface. On aura, en appliquant le théorème des fonctions composées,

$$p_1 F'_z + F'_x + (p_1 \tau'_z + \tau'_x) F'_\tau = 0,$$
$$q_1 F'_z + F'_y + (q_1 \tau'_z + \tau'_y) F'_\tau = 0.$$

Or, en vertu de l'hypothèse $F'_\tau = 0$, ces relations se réduisent à

$$p_1 F'_z + F'_x = 0, \qquad q_1 F'_z + F'_y = 0,$$

et déterminent le plan tangent à la surface (Σ) en l'un de ses points; si ce point est sur la caractéristique (16) de la surface (S), qui correspond à la valeur considérée de τ, les coefficients des équations qui déterminent p et p_1, q et q_1 auront respectivement les mêmes valeurs numériques : la surface (Σ) et la surface (S) auront même plan tangent tout le long de la caractéristique, ce qui prouve que (Σ) est bien une surface enveloppe.

Cette conclusion tombe évidemment en défaut si les équations en p et q se réduisent à des identités. En raisonnant comme nous l'avons fait (n° 9) pour les courbes enveloppes, on verra que la surface définie par les équations $F = 0$, $F'_\tau = 0$ contient les *lignes singulières* de toutes les surfaces de la famille, ou lignes dont tous les points satisfont aux trois conditions $F'_x = F'_y = F'_z = 0$. Elle pourrait donc être un lieu de lignes singulières, non une enveloppe. Mais, d'ordinaire, ce sera une enveloppe.

Remarque. — Nous avons vu (n° 10) qu'en général une famille de courbes tracées dans l'espace n'a pas d'enveloppe, les quatre équations

$$F_1(x, y, z, \tau) = 0, \qquad F_2(x, y, z, \tau) = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial \tau} = 0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial \tau} = 0$$

ne représentant pas une courbe. Mais, si cette famille est formée par les caractéristiques d'une famille de surfaces, les équations ci-dessus deviennent

$$F(x, y, z, \tau) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \tau} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \tau} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = 0.$$

Elles se réduisent à trois. Donc *une famille de caractéristiques admet une enveloppe,* tout au moins quand ces courbes ne présentent pas de point singulier.

16. Une famille de surfaces étant définie par trois équations

$$(17) \qquad x = f_1(u, v, \tau), \qquad y = f_2(u, v, \tau), \qquad z = f_3(u, v, \tau),$$

où τ est un paramètre variable, voici comment on déterminera leur enveloppe. Cette surface (Σ) pourra être représentée par les mêmes équations, à condition que τ soit une fonction convenablement déterminée de u et v. Désignons par A, B, C les coefficients directeurs du plan tangent à l'une des enveloppées et aussi à l'enveloppe en un de leurs points communs; on aura, pour l'enveloppée,

$$\begin{aligned} A x'_u + B y'_u + C z'_u &= 0, \\ A x'_v + B y'_v + C z'_v &= 0, \end{aligned}$$

et pour l'enveloppe, τ dépendant ici de u, v,

$$\begin{aligned} A x'_u + B y'_u + C z'_u + (A x'_\tau + B y'_\tau + C z'_\tau)\tau'_u &= 0, \\ A x'_v + B y'_v + C z'_v + (A x'_\tau + B y'_\tau + C z'_\tau)\tau'_v &= 0. \end{aligned}$$

Ces deux systèmes d'équations devant donner les mêmes valeurs pour A, B, C, et τ ne pouvant être indépendant de u et de v, il faut qu'on ait

$$A x'_\tau + B y'_\tau + C z'_\tau = 0.$$

Cette dernière relation, rapprochée des deux analogues, entraîne

$$\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_\tau & y'_\tau & z'_\tau \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation qui, jointe aux formules (17), détermine l'enveloppe des surfaces (17).

VII. — Surfaces développables.

17. Nous avons précédemment (n° 13) appelé *surface développable* toute surface lieu des tangentes à une courbe. On peut aussi définir la développable comme étant l'*enveloppe d'un plan dont la position dépend d'un paramètre*. En effet, la caractéristique d'un plan est une droite; les caractéristiques des divers plans de la famille forment elles-mêmes une famille de droites qui, en vertu d'une remarque antérieure (n° 15), ont une enveloppe, c'est-à-dire sont tangentes à une courbe; d'autre part, leur lieu est (n° 15) l'enveloppe des plans considérés. Par suite, *l'enveloppe d'un plan, dont la position dépend d'un paramètre, est le lieu des tangentes à une courbe,* qui peut d'ailleurs se réduire à un point, situé à distance finie ou rejeté à l'infini. Ainsi notre seconde définition des développables entraîne la première. Pour établir l'équivalence des deux définitions, nous démontrerons la proposition suivante :

Théorème. — *Toute surface lieu des tangentes à une courbe gauche est l'enveloppe d'un plan mobile dépendant d'un paramètre.*

Étant donnée une courbe gauche, je vais prouver qu'il existe une famille de plans qui admettent ses tangentes pour caractéristiques. Les coordonnées x, y, z des points d'une courbe sont des fonctions d'un paramètre u. Je considère un plan passant par le point (x, y, z). Il aura pour équation

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

Si les coefficients A, B, C sont des fonctions de u, la position du plan variera d'un point à l'autre de la courbe. On obtiendra sa caractéristique en associant à l'équation précédente l'équation dérivée

$$A'(X-x)+B'(Y-y)+C'(Z-z)-Ax'-By'-Cz'=0,$$

où les accents désignent des dérivées prises par rapport à u. Pour

que cette caractéristique se confonde avec la tangente en (x, y, z)

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'},$$

il faut que ses équations soient vérifiées quand on y remplace les binômes $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ respectivement par x', y', z'; d'où les deux conditions

$$A\,x' + B\,y' + C\,z' = 0, \qquad A'x' + B'y' + C'z' = 0.$$

Si l'on différentie la première en tenant compte de la seconde, on forme le système

$$Ax' + By' + Cz' = 0, \qquad Ax'' + By'' + Cz'' = 0,$$

d'où l'on déduit des valeurs proportionnelles à A, B, C. On peut prendre

$$A = y'z'' - z'y'', \qquad B = z'x'' - x'z'', \qquad C = x'y'' - y'x''.$$

Par suite, le plan cherché a pour équation

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Ce plan, qui jouera plus loin un grand rôle dans la théorie des courbes gauches, a reçu le nom de *plan osculateur;* c'est le plan qui a pour caractéristique la tangente en chaque point de la courbe.

18. *Remarque.* — Le plan osculateur ne peut pas être indéterminé en chaque point d'une courbe *gauche*. Si l'on suppose, en effet, les équations

$$y'z'' - z'y'' = 0, \qquad z'x'' - x'z'' = 0, \qquad x'y'' - y'x'' = 0$$

vérifiées pour toutes les valeurs de t, on en déduit

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'},$$

et, en intégrant deux fois successivement,

$$\frac{x'}{\alpha} = \frac{y'}{\beta} = \frac{z'}{\gamma}, \qquad \frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}.$$

Comme ici α, β, γ, x_0, y_0, z_0 sont des constantes, il est prouvé par là que *la droite est la seule ligne dont le plan osculateur soit partout indéterminé.*

Remarquons aussi que *si une courbe est plane, les plans osculateurs en ses différents points se confondent avec le plan même de cette courbe.* Si, en effet, on suppose qu'on ait pour tous les points d'une courbe $z = 0$ et par suite aussi $z' = z'' = 0$, l'équation du plan osculateur (18) se réduit à $Z = 0$, le binôme $x'y'' - y'x''$ n'étant pas nul, si la courbe n'est pas une droite.

19. D'après la définition même des surfaces développables, *l'ensemble des plans tangents à une développable forme une famille;* en d'autres termes, *le plan tangent à une développable ne dépend que d'un seul paramètre.* Il nous suffira de traduire géométriquement et analytiquement cet énoncé pour obtenir deux propriétés importantes des surfaces développables.

Théorème. — *Le plan tangent à une surface développable est le même tout le long de chaque génératrice.*

On a vu, en effet (n° **14**) que chaque enveloppée est tangente à l'enveloppe tout le long d'une caractéristique; ici l'enveloppée est un plan, l'enveloppe est la développable, les caractéristiques sont les génératrices.

Théorème. — *Toutes les surfaces développables vérifient une même équation aux dérivées partielles du second ordre qui les caractérise.*

Par cet énoncé, il faut entendre que l'une des coordonnées, z, de toute développable, considérée comme fonction des deux autres x et y, satisfait à l'équation du second ordre $rt - s^2 = 0$.

En effet, l'équation du plan tangent à une surface au point (x, y, z) peut être écrite

$$Z - pX - qY = z - px - qy.$$

En général, les trois coefficients de cette équation $p, q, z - px - qy$, qui sont des fonctions de x et y, ne se réduisent pas à des fonctions de l'un d'entre eux. C'est au contraire ce qui a lieu pour les développables. Nous avons donc à exprimer *notamment* que q est une fonction de p. Il faut écrire pour cela que le déterminant

fonctionnel de p et de q est nul, ce qui donne $rt - s^2 = 0$. Je dis qu'en vertu de cette condition le coefficient $\omega = z - px - qy$ est une fonction de p. On a, en effet,

$$\omega'_x = -rx - sy, \qquad \omega'_y = -sx - ty$$

et le déterminant fonctionnel de ω et de p

$$s\omega'_x - r\omega'_y = y(rt - s^2)$$

se réduit bien à zéro.

Il suit de là que toute surface qui vérifie l'équation $rt - s^2 = 0$ est une développable; car, dans cette hypothèse, les trois coefficients p, q, ω de son plan tangent sont fonctions de l'un d'eux, en sorte que ce plan tangent ne dépend que d'un paramètre.

VIII. — Enveloppes à deux paramètres.

20. Nous ne considérerons parmi les systèmes doublement infinis de surfaces que ceux qui sont formés de plans. Cherchons s'il existe une surface (Σ) tangente à tous les plans (P) d'un pareil système.

Remarquons d'abord que cette surface (Σ), supposée exister, ne peut toucher chaque plan (P) tout le long d'une courbe. Car elle serait en particulier tangente tout le long d'une courbe à tous les plans d'une famille que l'on formerait en établissant une relation entre les deux paramètres du système doublement infini. Mais on a vu (n° 15) que, quand une surface jouit de cette propriété, elle est le lieu des caractéristiques de ses enveloppées. Or ici ces caractéristiques sont des droites, et des droites ayant une enveloppe, en tant que caractéristiques (n° 15). La surface (Σ) serait donc une développable; tous les plans (P), étant tangents à une développable, ne dépendraient pas de deux paramètres, mais d'un seul, contrairement à l'hypothèse.

Cela posé, soit un système doublement infini de plans (P), représentés par l'équation

$$F = Ax + By + Cz + D = 0, \tag{19}$$

où A, B, C, D sont quatre fonctions données, mais quelconques, de

deux paramètres u et v. Nous venons de voir que l'enveloppe, si elle existe, ne touche chaque plan (P) qu'en des points isolés. Les coordonnées x, y, z de l'un de ces points M sont donc des fonctions de u et v, qui devront satisfaire à l'équation $F = 0$, et nous devrons exprimer que la surface (Σ) lieu de ces points est tangente en chacun des points M qui correspondent à un système donné de valeurs (u, v) au plan (P) défini par ces mêmes valeurs. Or, si nous désignons par α, β, γ les coefficients directeurs du plan tangent à la surface (Σ), on sait qu'ils sont donnés par les équations

$$\alpha x'_u + \beta y'_u + \gamma z'_u = 0, \qquad \alpha x'_v + \beta y'_v + \gamma z'_v = 0.$$

Ces équations devront donc être vérifiées par les coefficients directeurs A, B, C du plan (P) considéré; d'où les relations

$$A x'_u + B y'_u + C z'_u = 0, \qquad A x'_v + B y'_v + C z'_v = 0.$$

Mais, si l'on différentie l'équation $F = 0$ par rapport à u et v, on obtient les deux identités

$$A x'_u + B y'_u + C z'_u + F'_u = 0, \qquad A x'_v + B y'_v + C z'_v + F'_v = 0,$$

qui, comparées avec les précédentes, montrent que x, y, z sont les fonctions de u et de v que définissent les trois équations

$$(20) \qquad \begin{cases} F = Ax + By + Cz + D = 0, \\ F'_u = A'_u x + B'_u y + C'_u z + D'_u = 0, \\ F'_v = A'_v x + B'_v y + C'_v z + D'_v = 0. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que ces équations donnent généralement, pour chaque système de valeurs u, v, un point (x, y, z) et un seul. On peut, en effet, réduire à l'unité l'une des fonctions A, B, C, en divisant tous les coefficients de l'équation du plan par l'un d'eux. Soit donc $C = 1$. Les deux dernières équations deviennent

$$A'_u x + B'_u y + D'_u = 0,$$
$$A'_v x + B'_v y + D'_v = 0.$$

Elles ne peuvent se réduire à une seule que si l'on a

$$\frac{A'_v}{A'_u} = \frac{B'_v}{B'_u} = \frac{D'_v}{D'_u}.$$

Alors les trois fonctions A, B, D sont fonctions de l'une d'elles et les plans (P) ne dépendent que d'un paramètre.

Dans le cas particulier où l'on a toujours

$$\frac{A'_v}{A'_u} = \frac{B'_v}{B'_u} \neq \frac{D'_v}{D'_u},$$

les équations proposées sont incompatibles. C'est le seul cas où il n'y ait pas d'enveloppe. En résumé, *un système de plans représenté par une équation* $F = 0$ *dépendant de deux paramètres* u, v, *admet en général une enveloppe qu'on détermine en associant à l'équation* $F = 0$ *les deux équations dérivées* $F'_u = 0$, $F'_v = 0$.

21. Réciproquement, *les plans tangents à une surface n'ont d'autre enveloppe que cette surface elle-même.*

En effet, l'équation du plan tangent en un point (x, y, z) d'une surface est

$$F = -(Z - z) + p(X - x) + q(Y - y) = 0.$$

Égalons à zéro les dérivées de F par rapport à x et y, qui jouent ici le rôle des paramètres u, v. Nous aurons

$$F'_x = r(X - x) + s(Y - y) = 0,$$
$$F'_y = s(X - x) + t(Y - y) = 0.$$

Ce sont là deux équations linéaires et homogènes par rapport aux binômes $X - x$, $Y - y$. Or le déterminant $rt - s^2$ n'est pas nul si le plan tangent dépend bien de deux paramètres, c'est-à-dire si la surface n'est pas une développable. Dès lors, ces binômes sont nuls et les équations qui définissent l'enveloppe donnent $X = x$, $Y = y$, $Z = z$. Les plans considérés n'ont donc d'autre enveloppe que le lieu de leurs points de contact avec la surface à laquelle ils sont tangents, qui est cette surface elle-même.

Si la surface est développable, ses plans tangents ne dépendent que d'un paramètre; la théorie précédente tombe en défaut. Mais nous avons vu précédemment que ces plans tangents n'ont pas d'autre enveloppe que la développable elle-même. Le théorème est donc vrai sans aucune restriction.

CHAPITRE IV.

COURBURE ET TORSION. — PROPRIÉTÉS DE COURBURE DES COURBES PLANES.

I. — Cercle de courbure; centre et rayon. Directions principales.

1. Les coordonnées rectangulaires d'une courbe (C), plane ou gauche, étant supposées exprimées en fonction d'un paramètre u, le plan normal en un point simple $M(x, y, z)$ a pour équation (Chap. II, n° 2)

$$(1)\qquad (X-x)x'+(Y-y)y'+(Z-z)z'=0.$$

La caractéristique du plan normal, ou *droite polaire*, est représentée par l'équation précédente et l'équation dérivée

$$(2)\qquad (X-x)x''+(Y-y)y''+(Z-z)z''=x'^2+y'^2+z'^2.$$

Les cosinus directeurs de la droite polaire sont proportionnels aux trois binômes

$$A=y'z''-z'y'',\qquad B=z'x''-x'z'',\qquad C=x'y''-y'x'',$$

qui figurent dans l'équation du plan osculateur, défini (Chap. III, n° 17) comme ayant pour caractéristique la tangente en M. Nous pouvons donc définir aussi le *plan osculateur* comme mené par un point M d'une courbe (C) perpendiculairement à la droite polaire de ce point.

L'intersection K du plan osculateur avec la droite polaire s'appelle le *centre de courbure* de la courbe (C) relatif au point M.

La droite qui va du point M au centre de courbure K est dite

normale principale de (C) en M. C'est la perpendiculaire commune à la tangente et à la droite polaire.

Le *cercle de courbure* est le cercle décrit dans le plan osculateur, de K comme centre avec KM pour rayon.

2. Pour trouver les coordonnées X, Y, Z du centre de courbure, il suffit d'adjoindre aux équations (1) et (2) celle du plan osculateur

(3) $$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

Le système ainsi formé a pour déterminant $A^2+B^2+C^2$; il donne

(4) $$\frac{X-x}{Bz'-Cy'}=\frac{Y-y}{Cx'-Az'}=\frac{Z-z}{Ay'-Bx'}=\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

Le rayon R du cercle de courbure est déterminé par la formule

$$\frac{1}{R^2}=\frac{(A^2+B^2+C^2)^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\,\frac{1}{(Ay'-Bx')^2+(Bz'-Cy')^2+(Cx'-Az')^2}$$

qui, grâce aux deux identités

$$(Ay'-Bx')^2+(Bz'-Cy')^2+(Cx'-Az')^2$$
$$=(A^2+B^2+C^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(Ax'+By'+Cz')^2,$$
$$Ax'+By'+Cz'=0,$$

se simplifie et devient

(5) $$\frac{1}{R^2}=\frac{A^2+B^2+C^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}.$$

Si l'on prend pour variable l'arc s de la courbe, les coordonnées x, y, z deviendront des fonctions de s, par l'intermédiaire de u dont elles dépendent immédiatement; elles auront, en tant que fonctions de s, les mêmes propriétés qu'en tant que fonctions de u; et il en sera de même des cosinus directeurs α, β, γ de la tangente menée dans le sens des arcs croissants; on aura donc

$$A\,ds=\beta\,d\gamma-\gamma\,d\beta,\qquad B\,ds=\gamma\,d\alpha-\alpha\,d\gamma,\qquad C\,ds=\alpha\,d\beta-\beta\,d\alpha$$

et, par suite,

(6) $$\frac{1}{R^2}=\frac{(\alpha\,d\beta-\beta\,d\alpha)^2+(\beta\,d\gamma-\gamma\,d\beta)^2+(\gamma\,d\alpha-\alpha\,d\gamma)^2}{ds^2}.$$

Le numérateur du second membre n'est autre chose que

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2)-(\alpha d\alpha+\beta d\beta+\gamma d\gamma)^2=d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2,$$

puisque la somme $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ est égale à l'unité; d'où ces expressions équivalentes

$$(7) \qquad \frac{1}{R^2}=\frac{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2}{ds^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2.$$

On peut déduire de la première une formule valable quelle que soit la variable indépendante. Il suffit, en effet, d'écrire

$$(8) \qquad \frac{1}{R^2}=\frac{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}{ds^2}.$$

Ces diverses formules déterminent R par son carré. On *convient* de considérer R comme une longueur *essentiellement positive* et l'on prend

$$(9) \qquad R=\frac{\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

les deux radicaux ayant le même signe.

3. Dès lors, nous pouvons déterminer sans ambiguïté les *directions principales,* ou directions des trois droites rectangulaires qui forment, en chaque point d'une courbe, *le trièdre principal,* savoir : la *tangente*, la *normale principale* et la *binormale.*

La *tangente* MT, menée dans le sens des arcs croissants, a pour cosinus α, β, γ,

$$(10) \qquad \frac{\alpha}{x'}=\frac{\beta}{y'}=\frac{\gamma}{z'}=\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

le radical qui représente s' étant pris avec le signe *plus,* lorsque les arcs sont comptés (Chap. II, n° 7) dans le sens où le point M se déplace sur la courbe lorsque la variable u augmente.

La *normale principale* MN étant menée du point (x, y, z) vers le centre de courbure, ses cosinus α', β', γ' seront déterminés par les relations

$$(11) \qquad X-x=\alpha' R, \qquad Y-y=\beta' R, \qquad Z-z=\gamma' R,$$

rapprochées des formules (4) et (9). On trouve ainsi

$$(12)\quad \frac{\alpha'}{Bz'-Cy'}=\frac{\beta'}{Cx'-Az'}=\frac{\gamma'}{Az'-Cx'}=\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

les deux radicaux ayant le même signe.

La *binormale* MB est la perpendiculaire au plan osculateur menée par le point M. Ses cosinus α'', β'', γ'' étant proportionnels aux coefficients A, B, C, on aura

$$(13)\quad \frac{\alpha''}{A}=\frac{\beta''}{B}=\frac{\gamma''}{C}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

et nous conviendrons de donner au radical le signe qu'il a reçu dans les équations (12).

En vertu de cette dernière convention et des relations (10), les formules (12) deviennent

$$\alpha'=\gamma\beta''-\beta\gamma'',\qquad \beta'=\alpha\gamma''-\gamma\alpha'',\qquad \gamma'=\beta\alpha''-\alpha\beta''.$$

Par suite, le déterminant

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}=\alpha'(\gamma\beta''-\beta\gamma'')+\beta'(\alpha\gamma''-\gamma\alpha'')+\gamma'(\beta\alpha''-\alpha\beta'')$$

est égal à $+1$, ce qui exprime, comme on sait, que le trièdre principal M, TNB a même disposition que le trièdre O, XYZ des axes de coordonnées.

4. Tout ce qui précède s'applique sans nulle modification aux courbes planes; toute droite polaire étant perpendiculaire au plan de la courbe, ce plan se confond avec le plan osculateur. Le centre de courbure K est, par suite, la position limite du point d'intersection de la normale en M avec la normale infiniment voisine. On pourrait d'ailleurs le définir ainsi. Il est déterminé par les équations (1), (2) où l'on fait $z=0$. Alors A et B se réduisent à zéro; les coordonnées (X, Y) du centre de courbure relatif au point (x, y) sont fournies par les formules

$$(14)\quad \frac{X-x}{-y'}=\frac{Y-y}{x'}=\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''},$$

et la relation qui définit le rayon de courbure devient

$$(15)\qquad \frac{1}{R^2} = \frac{(x'y''-y'x'')^2}{(x'^2+y'^2)^3}.$$

Pour que R soit positif, on convient de prendre

$$R = +\sqrt{\frac{(x'^2+y'^2)^3}{(x'y''-y'x'')^2}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(16)\qquad R = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''},$$

le radical étant affecté du signe que le calcul donne pour le dénominateur $x'y''-y'x''$. Dans le cas particulier où la variable indépendante est l'abscisse, on a

$$(16)'\qquad R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Les directions principales sont déterminées par les relations

$$(17)\qquad \frac{\alpha}{x'} = \frac{\beta}{y'} = \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

$$(18)\qquad \frac{\alpha'}{-y'} = \frac{\beta'}{x'} = \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

le premier radical ayant le signe *plus* ou le signe *moins*, suivant que l'arc s et le paramètre u varient dans le même sens ou en sens contraires. Le second radical a le même signe que le premier ou un signe contraire, suivant que l'expression $C = x'y''-y'x''$ est positive ou négative. Ces règles résultent de celles qui concernent les formules (10) et (12).

II. — Rayon de courbure et rayon de torsion.

5. Considérons sur une courbe plane ou gauche un arc MM_1 et les tangentes menées à ses deux extrémités *dans le même sens*, celui des arcs croissants par exemple. On appelle *courbure de l'arc* l'angle des deux tangentes extrêmes; la *courbure moyenne* est le

rapport de cet angle à la longueur de l'arc; la *courbure au point* M est la limite vers laquelle tend la courbure moyenne quand le point M_1 vient se confondre avec M; le *rayon de courbure* en un point est l'inverse de la courbure en ce point.

La première de ces définitions répond à l'image d'une tige flexible, primitivement droite, et que l'on *courbe* plus ou moins en rapprochant ses extrémités. La seconde tire son origine de la propriété qu'a le cercle de nous paraître *également courbé* dans toutes ses parties : des arcs inégaux d'un même cercle n'ont pas la même courbure, puisque l'angle des tangentes extrêmes varie de l'un à l'autre; mais le rapport de cet angle à la longueur de l'arc correspondant est égal à l'inverse du rayon du cercle; il est donc le même pour tous les arcs d'un même cercle; d'autre part, de deux arcs de même longueur appartenant à deux cercles de rayons différents, celui qui nous paraît le moins courbé est celui qui appartient au cercle de plus grand rayon. Quant à la troisième définition, elle implique un théorème, dont la démonstration nous fournira en même temps l'expression du rayon de courbure.

Soient α, β, γ; α_1, β_1, γ_1 les cosinus directeurs des tangentes à la courbe au point M et au point voisin M_1; soient φ l'angle des deux tangentes et Δs l'arc MM_1. Je dis que le rapport de φ à Δs, ou, ce qui revient au même, le rapport de $\sin\varphi$ à Δs tend vers une limite bien déterminée quand Δs tend vers zéro. Dans la formule générale qui donne l'angle de deux droites

$$\sin^2\varphi = (\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)^2 + (\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1)^2 + (\gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1)^2,$$

introduisons l'hypothèse actuelle

$$\alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha, \qquad \beta_1 = \beta + \Delta\beta, \qquad \gamma_1 = \gamma + \Delta\gamma;$$

puis, divisons par le carré de Δs; il viendra

$$\frac{\sin^2\varphi}{\Delta s^2} = \frac{(\alpha\,\Delta\beta - \beta\,\Delta\alpha)^2 + (\beta\,\Delta\gamma - \gamma\,\Delta\beta)^2 + (\gamma\,\Delta\alpha - \alpha\,\Delta\gamma)^2}{\Delta s^2}.$$

Or, les cosinus α, β, γ ayant des dérivées (n° 2) par rapport à l'arc, ce rapport tend vers une limite

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha)^2 + (\beta\,d\gamma - \gamma\,d\beta)^2 + (\gamma\,d\alpha - \alpha\,d\gamma)^2}{ds^2}.$$

C'est la formule (6) de l'article précédent. Donc, *le rayon de courbure est égal au rayon du cercle de courbure.* On peut aussi écrire

$$\frac{1}{R^2} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{ds^2}. \tag{19}$$

6. Au lieu des tangentes en deux points voisins M et M_1, considérons les plans osculateurs. L'angle ψ de ces deux plans est ce qu'on appelle la *torsion* de l'arc MM_1. La limite vers laquelle tend le rapport de la torsion de l'arc MM_1 à sa longueur est la *torsion de la courbe au point* M. Le *rayon de torsion* T est l'inverse de la torsion.

L'angle ψ a même sinus que l'angle des binormales en M et en M_1. Les cosinus de la binormale étant α'', β'', γ'', le calcul qui vient d'être fait donnera pour le carré de la torsion en M la valeur

$$\frac{1}{T^2} = \frac{d\alpha''^2 + d\beta''^2 + d\gamma''^2}{ds^2}. \tag{20}$$

Proposons-nous d'exprimer la torsion au moyen des dérivées des coordonnées x, y, z.

Les coefficients directeurs des binormales en M et en M_1 étant A, B, C; A_1, B_1, C_1, l'angle ψ de ces deux droites sera donné par la formule

$$\sin^2\psi = \frac{(AB_1 - BA_1)^2 + (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)}.$$

Remplaçons A_1, B_1, C_1 par leurs valeurs

$$A_1 = A + \Delta A, \qquad B_1 = B + \Delta B, \qquad C_1 = C + \Delta C;$$

puis divisons par le carré Δs^2 de l'arc MM_1 et passons à la limite; il viendra

$$\frac{1}{T^2} = \frac{(AB' - BA')^2 + (BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2},$$

les accents désignant des dérivées. Or, en effectuant les calculs, on trouve

$$\frac{AB' - BA'}{z'} = \frac{BC' - CB'}{x'} = \frac{CA' - AC'}{y'} = Ax''' + By''' + Cz'''.$$

La valeur commune de ces rapports est le développement d'un déterminant que nous aurons souvent à considérer

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}; \tag{21}$$

de là résulte l'expression cherchée

$$\frac{1}{T^2} = \frac{\Delta^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}. \tag{22}$$

On voit que le rayon de torsion, qui n'est déterminé qu'au signe près, s'exprime rationnellement en fonction des dérivées des coordonnées, ce qui n'a pas lieu pour le rayon de courbure. Il dépend comme Δ des dérivées troisièmes, tandis que R n'en dépend pas. Pour le déterminer complètement, nous conviendrons de prendre

$$\frac{1}{T} = \frac{-\Delta}{A^2+B^2+C^2}. \tag{23}$$

D'après cela, le signe de la torsion est indépendant du sens dans lequel on compte les arcs; puisque la dérivée de l'arc n'intervient pas dans son expression. La propriété géométrique à laquelle ce signe correspond sera étudiée à la fin du Chapitre suivant.

Remarque. — Le plan osculateur étant le même en tous les points d'une courbe plane, *la torsion d'une courbe plane est nulle en tous ses points.* Réciproquement, *si une courbe a sa torsion constamment nulle, elle est plane.* En effet, l'évanouissement du déterminant Δ exprime qu'il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants entre les fonctions x', y', z'; c'est là une conséquence du théorème général sur lequel repose la théorie des équations différentielles linéaires. L'intégration de cette relation

$$lx' + my' + nz' = 0$$

donne, avec une nouvelle constante p,

$$lx + my + nz + p = 0,$$

ce qui est l'équation d'un plan. Le théorème est ainsi établi.

Nous démontrerons encore que *les courbes dont la courbure est constamment nulle sont des droites*. En effet, les équations $A = B = C = 0$ qui, en vertu de la formule (9), expriment cette hypothèse, reviennent à

$$y'z'' - z'y'' = 0, \qquad z'x'' - x'z'' = 0, \qquad x'y'' - y'x'' = 0.$$

Une intégration immédiate donne

$$\frac{x'}{a} = \frac{y'}{b} = \frac{z'}{c},$$

a, b, c étant trois constantes. Intégrant une fois de plus, on trouve

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

formules qui représentent une droite. Nous avons implicitement supposé que les courbes cherchées étaient réelles.

III. — Expressions diverses de la courbure des courbes planes. Exemples.

7. Voici diverses expressions du rayon de courbure des courbes planes, que nous obtiendrons directement.

Si l'on désigne par ε l'angle que la tangente MT en un point d'une courbe plane fait avec une direction fixe, la définition de R donne, au signe près,

$$R = \frac{ds}{d\varepsilon}.$$

1° Employons d'abord des coordonnées rectangulaires x, y, et soit x la variable. On a alors

$$\varepsilon = \operatorname{arc\,tang} y', \qquad ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx,$$

et il vient

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

C'est la formule $(16)'$ déjà trouvée autrement (n° 4).

2° Rapportons maintenant la courbe à des coordonnées polaires, r, θ. L'angle ε de la tangente MT avec l'axe polaire a pour

expression $\theta + V$, V étant l'angle que fait MT avec le rayon vecteur, et qui a pour cotangente la dérivée logarithmique $r' : r$ de r par rapport à θ. On a donc

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta, \qquad \varepsilon = \theta + \text{arc tang}\, \frac{r}{r'},$$

d'où, en effectuant les calculs,

$$(24) \qquad R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Si l'on introduit l'inverse z du rayon vecteur r, on a

$$\varepsilon = \theta - \text{arc tang}\, \frac{z}{z'},$$

d'où la formule plus simple

$$(25) \qquad R = \frac{(z^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{z^3(z + z'')}.$$

3° La longueur p de la perpendiculaire abaissée du pôle sur la tangente MT étant $r \sin V$, il suffit d'éliminer $d\theta$ entre les équations

$$R = \frac{ds}{d\theta + dV}, \qquad \text{tang}\, V = \frac{r\, d\theta}{dr}$$

pour trouver

$$(26) \qquad R = \frac{r \cos V\, ds}{\sin V\, dr + r \cos V\, dV} = \frac{r\, dr}{d(r \sin V)} = \frac{r\, dr}{dp},$$

formule qui intervient dans certaines applications.

4° Cherchons encore le rayon de courbure d'une courbe (E) définie comme enveloppe de la droite

$$(27) \qquad x \cos\varphi + y \sin\varphi = p,$$

p étant une fonction donnée de l'angle φ. A l'équation (27) adjoignons (Ch. III, n° 9) l'équation dérivée

$$(28) \qquad -x \sin\varphi + y \cos\varphi = p'.$$

Le système ainsi formé détermine les coordonnées x, y de la courbe (E) en fonction de φ. Or cet angle est celui que fait avec l'axe des x la normale à cette courbe ; il a même différentielle que l'angle de la tangente avec Ox ; il suffit donc, pour avoir le rayon

de courbure, de diviser l'élément d'arc ds par $d\varphi$, ce qui donne

$$R = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

les dérivées étant prises par rapport à φ. Différentions les équations (27) et (28) en considérant maintenant x et y comme des fonctions de φ et en tenant compte de ces équations elles-mêmes ; nous trouvons

$$x' \cos\varphi + y' \sin\varphi = 0,$$
$$-x' \sin\varphi + y' \cos\varphi = p + p'';$$

d'où, en faisant la somme des carrés, on déduit, au signe près,

$$(29) \qquad R = p + p''.$$

De cette formule, on peut tirer celle que nous venons d'établir autrement. Ajoutons les équations (27) et (28) membre à membre après les avoir élevées au carré ; il vient

$$r^2 = x^2 + y^2 = p^2 + p'^2.$$

Différentiant, nous trouvons

$$\frac{r\,dr}{d\varphi} = (p + p'')\frac{dp}{d\varphi},$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$R = \frac{r\,dr}{dp},$$

en tenant compte de la relation (29).

8. Avant de donner des exemples des formules précédentes, nous allons en déduire une relation qui lie le rayon de courbure à la longueur que nous avons appelée *normale* (Ch. II, n° 2) et dont nous préciserons ici la définition. Tout point de la normale en $M(x, y)$ peut être représenté par les formules

$$X = x + \alpha' l, \qquad Y = y + \beta' l;$$

pour les points situés du même côté de M que le centre de courbure, l est positif ; pour les autres il est négatif. Nous appellerons *normale* en M et nous représenterons par N la valeur algébrique

de l qui correspond au point où la normale rencontre l'axe des x; nous aurons donc

$$N = -\frac{y}{\beta'}.$$

Or les cosinus α', β' de la normale sont définis (n° 3) en grandeur et signe par les relations

$$\frac{1+y'^2}{y''} = \beta' R, \qquad -\frac{y'(1+y'^2)}{y''} = \alpha' R,$$

quand x est la variable indépendante. Par suite, il vient

$$(30) \qquad N = -\frac{Ryy''}{1+y'^2}.$$

Cette égalité, qui a lieu en grandeur et signe, ne tardera pas à nous servir.

9. Cherchons maintenant les expressions des rayons de courbure de diverses courbes usuelles.

Coniques. — L'équation de ces courbes

$$y = \sqrt{\alpha x^2 - 2\beta x + \gamma},$$

différentiée deux fois par rapport à x, donne

$$y' = \frac{\alpha x + \beta}{y}, \qquad y'' = \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{y^3}.$$

On déduit de là le rayon de courbure

$$R = \pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \pm\frac{[\alpha(\alpha+1)x^2 + 2\beta(\alpha+1) + \beta^2 + \gamma]^{\frac{3}{2}}}{\alpha\gamma - \beta^2}.$$

Or, si l'on élève au cube les deux membres de l'équation (30), on trouve, en tenant compte de l'expression générale de R^2,

$$\frac{N^3}{R} = -\frac{R^2 y^3 y''^3}{(1+y'^2)^3} = -y^3 y'';$$

mais, pour les coniques, on a $y^3 y'' = \alpha\gamma - \beta^2$, en sorte qu'il vient

$$R = \frac{N^3}{\beta^2 - \alpha\gamma}.$$

Ainsi *le rayon de courbure d'une conique à centre est proportionnel au cube de la normale,* limitée à un axe de symétrie. Supposons que ce soit l'axe focal qui coïncide avec l'axe des x. Si l'on prend pour origine le foyer de gauche, qu'on appelle e l'excentricité, p le paramètre (ordonnée au foyer) l'équation de la conique sera

$$x^2 + y^2 = (ex + p)^2;$$

son identification avec l'équation générale ci-dessus donne

$$\alpha = e^2 - 1, \qquad \beta = ep, \qquad \gamma = p^2,$$

d'où résulte $\beta^2 - \alpha\gamma = p^2$. En conséquence, *le rayon de courbure est égal au cube de la normale limitée à l'axe focal, divisé par le carré du paramètre.*

Parabole. — L'énoncé précédent est valable pour la parabole, que caractérise l'hypothèse $\alpha = 0$; mais on arrive à un résultat plus simple en limitant la normale à la directrice. La courbe étant rapportée à sa directrice, prise comme axe des x, et à son axe de symétrie, son équation est

$$x^2 - 2py - p^2 = 0.$$

On en déduit successivement

$$y' = \frac{x}{p}, \qquad y'' = \frac{1}{p}, \qquad R = \frac{(x^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p}.$$

Pour comparer le rayon de courbure à la normale, rappelons la formule (30)

$$\frac{R}{N} = -\frac{1 + y'^2}{yy''}.$$

A raison des valeurs actuelles de y, y' et y'', son second membre se réduit à -2. Ainsi, *le rayon de courbure de la parabole est double de la normale limitée à la directrice, et il est dirigé en sens contraire;* ce qui donne un moyen simple de le construire.

Cycloïde. — La cycloïde décrite par un point M d'un cercle de rayon a, qui roule sur l'axe Ox, est représentée par les équations

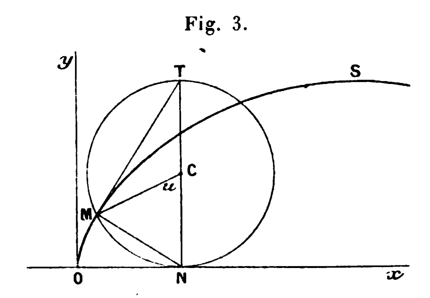
$$x = a(u - \sin u), \qquad y = a(1 - \cos u).$$

L'angle u étant le double de celui que la tangente en M à la cycloïde fait avec l'axe des y, le rayon de courbure aura pour expression

$$R = 2\frac{ds}{du} = 2\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} = 4a\sin\frac{u}{2}.$$

Mais on sait que la normale en M à la cycloïde se confond avec la droite qui joint le point M au point de contact N du cercle générateur avec Ox, base de la courbe; le segment MN ou la *normale* limitée à la base est donc la corde de l'angle u dans le cercle générateur, et a pour longueur $2a\sin\frac{u}{2}$. Donc, *le rayon de courbure d'une cycloïde est double de la normale limitée à la base, et il est dirigé dans le même sens*, vu la forme de la courbe.

Fig. 3.



Pour établir ce résultat au moyen des seules équations de la courbe, remarquons que la formule (30) peut s'écrire

$$-\frac{N}{R} = \frac{yy''}{1+y'^2} = y\frac{d}{dx}\left(\text{arc tang}\frac{dy}{dx}\right).$$

Mais des équations de la cycloïde on déduit

$$\frac{dx}{du} = y, \qquad \frac{dy}{dx} = \cot\frac{u}{2}, \qquad \text{arc tang}\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2},$$

ce qui donne

$$N = -R\frac{d}{du}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}\right) = \frac{R}{2},$$

conformément à ce qui vient d'être trouvé.

Chaînette. — La chaînette est définie par l'équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

l'axe des x est sa *base*, la longueur a son *paramètre*. En différentiant y par rapport à x, on trouve

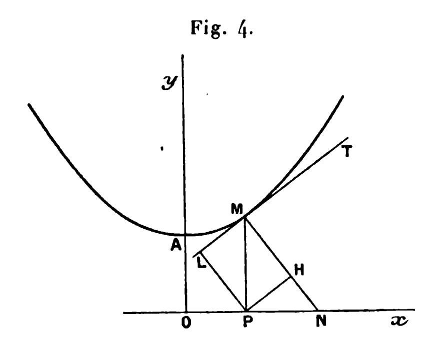
$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \qquad 1 + y'^2 = \frac{y^2}{a^2}, \qquad y'' = \frac{y}{a^2},$$

d'où résulte l'expression du rayon de courbure

$$R = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{y^2}{a}.$$

Les relations précédentes donnent immédiatement $yy'' = 1 + y'^2$, de sorte que la formule (30) devient $R = -N$. Donc, *le rayon de courbure de la chaînette est égal à la normale, limitée à la base, et il est dirigé en sens contraire*. On voit aussi sur l'expression de R que *l'ordonnée de tout point de la chaînette est moyenne proportionnelle entre le paramètre de la courbe et son rayon de courbure en ce point*.

Fig. 4.



D'après cela, le segment MH, projection de l'ordonnée sur la normale, est égal au paramètre. Si donc on projette le pied P de l'ordonnée en L sur la tangente, le segment PL sera constant et égal au paramètre. Cherchons maintenant la longueur s de l'arc AM; l'expression trouvée pour $1 + y'^2$ donne $s' = \frac{y}{a} = ay''$.

Intégrant depuis $x = 0$, on trouve $s = ay'$. Or, c'est précisément là le côté LM du triangle MLP, puisque PL égale a et que l'angle en P a pour tangente y'. Donc, *l'arc de la chaînette, compris entre le sommet et un point* M, *est égal à la projection de l'ordonnée de* M *sur la tangente en ce point.*

Lemniscate. — Cette courbe a pour équation en coordonnées polaires

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Calculant la dérivée logarithmique de r par rapport à θ, nous trouvons (n° 7, 2°)

$$\cot V = \frac{r'}{r} = -\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}, \qquad \sin V = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = \cos 2\theta,$$

Or la distance p du pôle à la tangente au point (r, θ) étant égale à $r \sin V$, il vient

$$p = r\cos 2\theta = a\cos^{\frac{3}{2}} 2\theta.$$

Appliquant la formule $R\,dp = r\,dr$, nous trouvons

$$R = \frac{a}{2}\,\frac{d(\cos 2\theta)}{d\left(\cos^{\frac{3}{2}} 2\theta\right)} = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{a^2}{3r}.$$

Ainsi, *le rayon de courbure de la lemniscate varie en raison inverse de son rayon vecteur.*

IV. — Détermination de courbes planes par des propriétés du rayon de courbure.

10. Le rayon de courbure étant un élément du second ordre, si l'on cherche les courbes dont le rayon de courbure a une relation donnée avec des éléments du premier ou du second ordre, on sera conduit à intégrer une équation différentielle du second ordre. Voici des exemples où la solution n'exige que des quadratures.

Problème. — *Trouver toutes les courbes dont le rayon de courbure est proportionnel à une puissance de la normale.* Il s'agit ici de la normale N limitée à l'axe des x; nous avons trouvé

$$N = y\sqrt{1+y'^2}, \qquad R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Nous généraliserons la question proposée en supposant R de la forme $hN + kN^n$, ce qui donnera l'équation du second ordre

$$(1+y'^2) = \left[hy + ky^n(1+y'^2)^{\frac{n-1}{2}}\right]y''.$$

Cette équation ne contenant pas la variable x, on l'abaisse au premier ordre en introduisant l'inconnue auxiliaire $y' = p$ et éliminant la différentielle dx au moyen de la relation $dy = p\,dx$; il vient ainsi

$$\frac{dy}{dp} = \frac{hpy}{1+p^2} + kp(1+p^2)^{\frac{n-3}{2}}y^n,$$

ce qui est une équation de Bernoulli pour la fonction y. Par deux quadratures on en déduira y en fonction de p; on tirera ensuite x de la relation $dy = p\,dx$ au moyen d'une troisième quadrature. Les deux coordonnées des courbes cherchées seront ainsi exprimées en fonction du paramètre p, qui est le coefficient angulaire de la tangente.

Nous étudierons seulement quelques cas particuliers.

1° *Le rayon de courbure est proportionnel au cube de la normale.* — Élevons au cube les deux membres de la formule (30)

$$N = -R\frac{yy''}{1+y'^2},$$

puis remplaçons N^3 par kR; nous aurons

$$k = -\frac{R^2y^3y''^3}{(1+y'^2)^3},$$

ou, en mettant pour R^2 sa valeur connue,

$$k = -y^3y'' = -y^3p\frac{dp}{dy}.$$

Séparant les variables et intégrant, on trouve

$$\frac{p^2}{k} - \frac{1}{y^2} = \text{const.} = c.$$

Remplaçons p par $dy : dx$, résolvons par rapport à dx et intégrons; nous aurons successivement

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{cky^2 + k}}, \qquad ck(x - x_0) = \sqrt{cky^2 + k}.$$

On trouve ainsi *des coniques admettant l'axe des x comme axe de symétrie.* Les paraboles ne sont pas exclues; on les obtiendrait en faisant $c = 0$ avant la dernière intégration. Ainsi, la propriété signalée au début du n° 9 est caractéristique des coniques.

2° *Le rayon de courbure est proportionnel à la normale.* — Dans la formule (30) faisons $R = kN$; il viendra

$$1 = -\frac{kyy''}{1 + y'^2} = -\frac{kyp}{1 + p^2}\frac{dp}{dy}.$$

Séparant les variables et intégrant, on trouve

(31) $$y(1 + p^2)^{\frac{k}{2}} = \text{const.} = \frac{c}{2}.$$

Si $k = -2$, nous tirons successivement de là

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2cy - c^2}},$$
$$(x - x_0)^2 = 2cy - c^2.$$

Cette équation représente *toutes les paraboles ayant pour directrice l'axe des x;* la propriété trouvée au n° 9 est donc caractéristique de la parabole.

Si $k = +2$, l'équation (31), où l'on remplace c par $4a$, donne

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}}.$$

Il suffirait d'intégrer pour avoir x en fonction de y; mais il est préférable de remarquer qu'on peut écrire

$$dx = y\,d \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right),$$

équation que l'on peut remplacer par les deux suivantes

$$y = a(1 - \cos u), \qquad dx = y\,du = a(1 - \cos u)\,du;$$

intégrant la dernière, on trouve

$$x - x_0 = a(u - \sin u).$$

Les expressions que nous venons d'obtenir pour y et x sont celles qui définissent (n° 9) *une cycloïde dont le cercle générateur roule sur l'axe des* x.

Si $k = +1$, l'équation (31), après changement de c en $2a$, donne successivement

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \qquad x - x_0 = \sqrt{a^2 - y^2}.$$

On trouve ainsi *tous les cercles ayant leur centre sur* Ox, résultat qui était facile à prévoir.

Si $k = -1$, l'équation (31), rendue rationnelle, devient

$$\frac{4y^2}{c^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1.$$

Au lieu d'en tirer dx et d'intégrer, remarquons que cette équation est vérifiée par la fonction

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{c}} + e^{-\frac{x-x_0}{c}}\right).$$

Elle représentera donc *toutes les chaînettes ayant pour base l'axe des* x, ce qui complète un résultat trouvé au n° 9.

11. Problème. — *Trouver toutes les courbes dont le rayon de courbure est une fonction donnée, soit de la distance de la tangente à un point fixe, soit du rayon vecteur.*

Soient M un point d'une courbe, r sa distance à l'origine, p la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente en M; le rayon de courbure R en M a pour expression (n° 7)

$$R = \frac{r\,dr}{dp}.$$

Supposons d'abord que R soit une fonction donnée de p; nous aurons

$$\frac{r\,dr}{dp} = f(p), \qquad r^2 = 2\int f(p)\,dp.$$

Le problème revient donc à *trouver les courbes dans lesquelles p est une fonction connue de r*. Soient θ l'angle que fait le rayon vecteur OM avec un axe issu du pôle O, et r' la dérivée de r par rapport à θ. On obtient aisément la formule

$$(32) \qquad p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

En égalant p à une fonction de r, on arrive à une équation de la forme $r' = \varphi(r)$, qu'on intègre par une quadrature.

Supposons maintenant que R soit une fonction donnée de r; on aura

$$\frac{r\,dr}{dp} = f(r).$$

Tirons dp et intégrons, ce qui donne

$$p = \int \frac{r\,dr}{f(r)} = \varphi(r);$$

nous sommes ramenés à la question qui vient d'être résolue.

Considérons par exemple le cas où R varie en raison inverse du rayon vecteur :

$$\frac{r\,dr}{dp} = \frac{a^2}{3r}.$$

L'intégration conduit à

$$r^3 - a^2 p = \text{const.} = b^3.$$

Remplaçons p par son expression (32), puis résolvons par rapport à r'; nous serons finalement ramenés à l'intégrale

$$\theta = \int \frac{(r^3 - b^3)\,dr}{\sqrt{a^4 r^4 - r^2(r^3 - b^3)^2}},$$

qui est une intégrale hyperelliptique. Dans le cas particulier où l'on prendrait $b = 0$, on aurait simplement

$$\theta = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = \int \frac{dz}{2\sqrt{1 - z^2}},$$

en posant $r^2 = a^2 z$. Cette équation donne $z = \cos 2(\theta - \theta_0)$; on trouve ainsi des lemniscates toutes égales à la lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, ce qui s'accorde avec un résultat antérieur (n° 9); mais on voit que la lemniscate n'est pas la seule courbe dont le rayon de courbure et le rayon vecteur aient un produit constant, puisqu'elle correspond à une valeur particulière de b.

V. — Équations intrinsèques des courbes planes.

12. On appelle *équation intrinsèque* d'une courbe plane la relation qui lie son rayon de courbure à son arc. Cette dénomination est motivée par la propriété suivante :

Théorème. — *Une courbe plane est entièrement déterminée de forme lorsqu'on donne l'expression de sa courbure en fonction de son arc.*

En effet, de l'équation

$$\frac{1}{R} = \varphi(s),$$

où la fonction φ est supposée donnée, on déduit l'angle ε que la tangente menée à la courbe à l'extrémité de l'arc s fait avec une droite fixe prise pour axe des x :

$$\varepsilon = \int \frac{ds}{R} = \int \varphi(s)\, ds = \varepsilon_0 + f(s).$$

Connaissant ε en fonction de s, on appliquera les formules

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varepsilon, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\varepsilon,$$

démontrées antérieurement (Chap. II, n° 7) et qui donneront

$$x = \int \cos(f + \varepsilon_0)\, ds, \qquad y = \int \sin(f + \varepsilon_0)\, ds.$$

Si l'on représente par ξ et η les deux intégrales

$$\xi(s) = \int_0^s \cos f(s)\, ds, \qquad \eta(s) = \int_0^s \sin f(s)\, ds,$$

par x_0 et y_0 deux constantes arbitraires, on voit qu'on aura

$$x = x_0 + \xi \cos\varepsilon_0 - \eta \sin\varepsilon_0,$$
$$y = y_0 + \xi \sin\varepsilon_0 + \eta \cos\varepsilon_0.$$

Ces formules, qui résolvent entièrement le problème, sont identiques aux formules de transformation des coordonnées; elles ne représentent pas autre chose que la courbe $x = \xi(s)$, $y = \eta(s)$, déplacée dans son plan, d'une manière tout à fait quelconque puisque x_0, y_0 et ε_0 sont arbitraires; mais *la forme* de cette courbe est parfaitement déterminée.

En conséquence, si l'on connaît *une* courbe satisfaisant à une équation intrinsèque donnée, on peut affirmer que c'est *la seule*. Ainsi, dans le plan :

la droite est la seule courbe qui ait son rayon de courbure infini;

le cercle est la seule courbe qui ait son rayon de courbure constant, mais fini;

la chaînette est la seule courbe vérifiant l'équation intrinsèque

$$R = \frac{s^2 + a^2}{a}.$$

Nous avons vu, en effet (n° 9), que le rayon de courbure, l'ordonnée et l'arc de la chaînette sont liés par les relations

$$R = \frac{y^2}{a}, \qquad y^2 = s^2 + a^2,$$

d'où résulte visiblement la proposée.

Pour démontrer directement l'un de ces résultats, il suffira d'effectuer, sur la fonction particulière $\varphi(s)$ qui aura été donnée, les intégrations par lesquelles nous avons établi le théorème précédent. Ainsi, soit donné $R = \text{const.} = a$. On aura successivement

$$\varepsilon = \int \frac{ds}{a} = \frac{s - s_0}{a},$$
$$x = \int \cos\varepsilon \, ds = \int \cos \frac{s - s_0}{a} \, ds = x_0 + a \sin \frac{s - s_0}{a},$$
$$y = \int \sin\varepsilon \, ds = \int \sin \frac{s - s_0}{a} \, ds = y_0 - a \cos \frac{s - s_0}{a},$$

d'où l'on déduit immédiatement l'équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2,$$

qui représente tous les cercles de rayon a.

Exemple. — Soit donnée l'équation intrinsèque $R^2 + s^2 = 16\,a^2$. On en tire

$$\varepsilon = \int \frac{ds}{\sqrt{16a^2 - s^2}} = \arc\sin\frac{s}{4a}, \quad s = 4a\sin\varepsilon.$$

Il est commode ici de conserver ε comme variable auxiliaire, ce qui donne

$$x = \int \cos\varepsilon\, ds = 4a\int \cos^2\varepsilon\, d\varepsilon \quad = a(2\varepsilon + \sin 2\varepsilon),$$

$$y = \int \sin\varepsilon\, ds = 4a\int \sin\varepsilon \cos\varepsilon\, d\varepsilon = a(-1 - \cos 2\varepsilon).$$

Si maintenant on remplace 2ε par $\pi + u$, on trouvera, abstraction faite du signe de y et d'une constante ajoutée à x, les formules qui représentent (n° 9) une cycloïde.

Remarque. — Il est à peine besoin de faire observer qu'une courbe plane est entièrement déterminée de forme quand on donne son rayon de courbure et son arc, exprimés en fonction d'une variable auxiliaire. C'est ce qu'il serait bien aisé de démontrer.

CHAPITRE V.

FORMULES FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES COURBES. APPLICATIONS DIVERSES.

I. — Différentielles des cosinus des directions principales.

1. Il convient, dans beaucoup de questions relatives aux courbes, de recourir aux *formules fondamentales* de M. Frenet, qui font connaître les différentielles des cosinus des directions principales, et que nous allons démontrer.

Pour trouver celles qui concernent la tangente, écrivons les équations qui représentent la droite polaire quand l'arc est pris pour variable indépendante :

$$(1) \qquad (X-x)\,\alpha + (Y-y)\,\beta + (Z-z)\,\gamma = 0,$$

$$(1)' \qquad (X-x)\frac{d\alpha}{ds} + (Y-y)\frac{d\beta}{ds} + (Z-z)\frac{d\gamma}{ds} = 1;$$

la première est celle du plan normal et la seconde s'en déduit par différentiation. Ces équations montrent que le plan $(1)'$ est perpendiculaire au plan normal (1). Par suite, la normale principale, qui est perpendiculaire à l'intersection de ces deux plans et située dans le plan (1), est perpendiculaire au plan $(1)'$. On a donc

$$\frac{1}{\alpha'}\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\beta'}\frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{\gamma'}\frac{d\gamma}{ds} = h,$$

en désignant par h la valeur des rapports égaux. Tirons les dérivées de α, β, γ pour les substituer dans l'équation $(1)'$; il vient

$$h[(X-x)\alpha' + (Y-y)\beta' + (Z-z)\gamma'] = 1,$$

d'où, ayant égard aux relations (11) du Chapitre précédent, on

conclut $hR = 1$, et, par suite, les formules

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R}.$$

En vue d'obtenir les différentielles des cosinus de la binormale, rappelons-nous que la tangente est la caractéristique du plan osculateur. Nous pourrons la définir par les deux équations

$$\text{(2)} \qquad (X - x)\,\alpha'' + (Y - y)\,\beta'' + (Z - z)\,\gamma'' = 0,$$

$$\text{(3)} \qquad (X - x)\frac{d\alpha''}{ds} + (Y - y)\frac{d\beta''}{ds} + (Z - z)\frac{d\gamma''}{ds} = 0,$$

dont la seconde s'obtient en différentiant la première et représente un plan perpendiculaire au plan osculateur (2). Ce plan, appelé *plan rectifiant,* coupe le plan osculateur suivant la tangente. Ainsi la normale principale, qui est perpendiculaire à la tangente et située dans le plan osculateur, est perpendiculaire au plan rectifiant. On a donc la suite de rapports égaux

$$\frac{1}{\alpha'}\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{1}{\beta'}\frac{d\beta''}{ds} = \frac{1}{\gamma'}\frac{d\gamma''}{ds},$$

dont la valeur commune est, au signe près, égale à la torsion, en vertu de la formule (15) du Chapitre précédent. En prenant la torsion même pour les représenter, on attribue un signe à cette grandeur et l'on trouve les formules

$$\text{(II)} \qquad \frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta'}{T}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T}.$$

Mais, si l'on veut déterminer l'expression algébrique de la torsion, il faudra reprendre le calcul fait au Chapitre précédent (n° 5), ou procéder comme nous l'indiquons plus bas (n° 2, *Rem.* II).

Il nous reste à trouver les dérivées des cosinus directeurs de la normale principale. Partons de la condition

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1,$$

qui lie les cosinus directeurs α, α', α'' de l'axe Ox par rapport aux droites MT, MN, MB. On en tire, par différentiation,

$$\alpha'\frac{d\alpha'}{ds} = -\alpha\frac{d\alpha}{ds} - \alpha''\frac{d\alpha''}{ds};$$

d'où, en tenant compte des formules des deux premiers groupes,

$$\text{(III)}\quad \frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \qquad \frac{d\beta'}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta'}{T}, \qquad \frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma'}{T}.$$

Les deux dernières relations se déduisent de la première par symétrie. Ainsi se trouvent établies les *formules fondamentales de la théorie des courbes*. Nous allons les transcrire ensemble, en n'écrivant que la première de chaque groupe :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \qquad \frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}.$$

Nous ne ferons, dans tout ce Chapitre, que les appliquer à la solution de divers problèmes, nous bornant ici à signaler comme une de leurs conséquences immédiates la formule

$$\frac{d\alpha'^2 + d\beta'^2 + d\gamma'^2}{ds^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2},$$

qui est l'analogue des relations (14) et (15) du Chapitre IV.

2. *Remarque I.* — Il convient de prouver que le signe attribué ci-dessus à la torsion est bien celui qui résulte de la convention faite au nº 5 du Chapitre IV. A cet effet, reportons-nous à ce Chapitre et différentions α'' tiré de la première des équations (13); il viendra

$$s'\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{A'(A^2+B^2+C^2) - A(AA'+BB'+CC')}{(A^2+B^2+C^2)\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

le radical ayant le signe de s'. Le numérateur peut s'écrire

$$B(BA' - AB') + C(CA' - AC') = -(Bz' - Cy')\Delta,$$

à raison des identités déjà mentionnées

$$\frac{AB' - BA'}{z'} = \frac{BC' - CB'}{x'} = \frac{CA' - AC'}{y'} = \Delta.$$

Nous aurons donc

$$\frac{d\alpha''}{ds} = -\frac{(Bz' - Cy')\Delta}{(A^2+B^2+C^2)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

et, si l'on tient compte des formules (12) où les deux radicaux

ont, comme ici, le même signe, on pourra écrire

$$\frac{1}{\alpha'}\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{-\Delta}{A^2+B^2+C^2}.$$

En vertu de la formule (23), le second membre est égal, *en grandeur et en signe,* à la torsion, conformément avec ce que nous venons de trouver.

C'est là une démonstration directe des équations (II). En voici l'analogue pour le groupe (I). La première des relations (10) donne, par différentiation,

$$s'\frac{d\alpha}{dx} = \frac{x''(x'^2+y'^2+z'^2) - x'(x'x''+y'y''+z'z'')}{(x'^2+y'^2+z'^2)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

Le radical représentant s', on peut écrire

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{Bz'-Cy'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}.$$

Mais, d'après les équations (9) et (12), où les deux radicaux sont pris avec le même signe, le second membre de la formule précédente est précisément égal au rapport $\alpha' : R$.

Remarque II. — Les formules fondamentales permettent d'évaluer la torsion. Partons en effet de l'identité

$$Ax''+By''+Cz''=0,$$

l'une de celles qui définissent les coefficients

$$A = y'z''-z'y'', \qquad B = z'x''-x'z'', \qquad C = x'y''-y'x''$$

du plan osculateur; différentiée, elle donne

$$A'x''+B'y''+C'z'' = -(Ax'''+By'''+Cz''') = -\Delta.$$

Or, d'après la définition de α'' (Ch. IV, n° 3), on a

$$A = \alpha''\sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

le radical ayant le signe de s'. Différentions A, en tenant compte des formules (II); nous trouverons

$$A' = \frac{\alpha' s'}{T}\sqrt{A^2+B^2+C^2} + \alpha''\frac{d}{du}\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Mais, en vertu des relations (12), ceci peut s'écrire

$$A' = \frac{Bz' - Cy'}{T} + \alpha'' \frac{d}{du}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

On aurait pour B' et C' des expressions analogues. Substituons-les dans le développement de Δ obtenu ci-dessus, et observons que la somme $\alpha''x'' + \beta''y'' + \gamma''z''$ est nulle. Il viendra

$$-T\Delta = (Bz' - Cy')x'' + (Cx' - Az')y'' + (Ay' - Bx')z'' = A^2 + B^2 + C^2,$$

ce qui donne l'expression connue de T.

II. — Quelques propriétés des hélices.

3. *Définition.* — Étant donnés un cylindre, de forme quelconque, et un plan sur lequel sont tracées deux droites, on enroule le plan sur le cylindre de façon que l'une d'elles s'enroule sur une section droite du cylindre; la courbe suivant laquelle s'enroule l'autre droite du plan est une *hélice*. Si le cylindre est de révolution, l'hélice est dite *circulaire*.

Traduite en termes plus précis, la définition précédente peut s'énoncer ainsi : une *hélice* est la courbe qu'on trace sur un cylindre en portant sur chacune de ses génératrices, à partir d'une section droite, une longueur proportionnelle à l'arc de cette section compris entre la génératrice et une origine fixe.

Une hélice est donc représentée en coordonnées rectangulaires par les formules

$$(4) \qquad x = \chi(s_1), \qquad y = \psi(s_1), \qquad z = ks_1,$$

où s_1 désigne l'arc de la section droite du cylindre; les fonctions χ et ψ sont, en conséquence, liées par la relation

$$(5) \qquad \chi'^2 + \psi'^2 = 1.$$

Nous allons passer en revue quelques propriétés des courbes définies par les équations (4) et (5).

1° *L'arc d'une hélice est proportionnel à l'arc de la section droite du cylindre qui la porte.* — En effet, l'hélice passe par le point pris pour origine des arcs s_1 sur la section droite. Si l'on

compte son arc s à partir de ce point, il s'annulera avec s_1. Or on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\chi'^2 + \psi'^2)\, ds_1^2 + k^2 ds_1^2 = (1 + k^2)\, ds_1^2\,;$$

d'où l'on conclut, par une intégration immédiate,

$$s = s_1\sqrt{1+k^2}.$$

Le paramètre k pouvant être supposé positif, il existe un angle aigu φ dont k est la tangente. On aura donc

$$k = \operatorname{tang}\varphi, \qquad s = \frac{s_1}{\cos\varphi},$$

résultat que l'on pourrait considérer comme évident, d'après la définition mécanique de l'hélice. Car les arcs s_1 sont les segments de la droite qui s'enroule suivant la section droite ; les arcs s sont les segments correspondants de la droite qui s'enroule suivant l'hélice ; si φ est l'angle aigu de ces deux droites, le segment s_1, projection du segment s, est égal à $s\cos\varphi$.

2° *La tangente à l'hélice fait un angle constant avec la génératrice de son point de contact.* — En effet, le cosinus γ de cet angle a pour expression

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{k\, ds_1}{\sqrt{1+k^2}\, ds_1} = \sin\varphi.$$

Ce résultat est évident d'après la première définition de l'hélice.

3° *La normale principale de l'hélice est normale au cylindre en son point d'incidence.* — En effet, le cosinus γ' de l'angle qu'elle fait avec Oz est nul en vertu de la formule $R\, d\gamma = \gamma' ds$ et de la propriété précédente, $\gamma = \text{const.}$ La normale principale est donc perpendiculaire à la génératrice du cylindre ; mais elle est perpendiculaire aussi à la tangente à l'hélice, qui est une autre droite du plan tangent au cylindre. Elle est donc perpendiculaire à ce plan tangent.

4° *Le rayon de courbure de l'hélice est proportionnel à celui de la section droite du cylindre.* — Si l'on appelle R et R_1 ces deux rayons, on aura

$$\frac{1}{R_1^2} = \left(\frac{d^2x}{ds_1^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds_1^2}\right)^2, \qquad \frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2.$$

Le dernier terme de la seconde formule est nul, la dérivée de γ étant nulle. D'autre part, on a, quelle que soit la fonction t,

$$\frac{dt}{ds_1} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{dt}{ds}, \qquad \frac{d^2t}{ds_1^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d^2t}{ds^2}.$$

Ces relations, appliquées aux coordonnées x et y, donnent

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\cos^4\varphi}{R_1^2}, \qquad R = \frac{R_1}{\cos^2\varphi}.$$

5° *Le rayon de torsion de l'hélice est proportionnel à son rayon de courbure.* — En effet, d'après la propriété 2°, le plan osculateur de l'hélice fait l'angle φ avec le plan des xy; la binormale fait donc aussi l'angle φ avec l'axe des z; d'où $\gamma'' = \cos\varphi$. Mais, d'après l'une des formules fondamentales

$$\frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T},$$

γ' étant nul, on a

$$\frac{T}{R} = -\frac{\gamma''}{\gamma} = -\cot\varphi,$$

ce qui démontre la proposition que nous avions en vue.

4. Certaines des propriétés précédentes caractérisent les hélices. Ainsi, *toute courbe dont les tangentes font un angle constant avec une direction fixe est une hélice.* En effet, si les tangentes font un angle constant $90° - \varphi$ avec l'axe des z, le cosinus γ est égal à $\sin\varphi$. On a successivement

$$dz = \gamma\, ds = \sin\varphi\, ds, \qquad z = s\sin\varphi.$$

Soit s_1 l'arc de la projection de la courbe sur un plan perpendiculaire à Oz; on aura

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds_1^2 + \sin^2\varphi\, ds^2,$$
$$ds_1 = \cos\varphi\, ds, \qquad s_1 = s\cos\varphi,$$

à la seule condition de faire passer le plan des xy par l'origine des arcs de la courbe gauche. Dès lors, on a $z = s_1 \operatorname{tang}\varphi$, ce qui est l'expression analytique de la définition des hélices.

Toute courbe dont la torsion et la courbure ont un rapport

constant est une hélice. En effet les formules de Frenet donnent

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \qquad \frac{d\alpha''}{d\alpha} = \frac{R}{T}.$$

Soit H la valeur constante du rapport R : T. Nous pouvons écrire

$$d\alpha'' = H\, d\alpha, \qquad d\beta'' = H\, d\beta, \qquad d\gamma'' = H\, d\gamma,$$
$$\alpha'' = H\alpha - A, \qquad \beta'' = H\beta - B, \qquad \gamma'' = H\gamma - C,$$

en désignant par A, B, C trois constantes d'intégration. Ajoutons ces équations, après les avoir multipliées respectivement par α, β, γ. Il viendra

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = H,$$

ce qui montre que les tangentes aux courbes cherchées font toutes un angle constant avec une direction fixe, celle dont les coefficients directeurs sont A, B, C. Par suite ces courbes sont des hélices.

5. Pour *l'hélice circulaire*, les résultats sont encore plus remarquables. Le cylindre qui porte la courbe étant de révolution, sa section droite est un cercle; le rayon de courbure R_1 est constant. Il en résulte que *le rayon de courbure de l'hélice est constant* puisqu'on a

$$R = \frac{R_1}{\cos^2\varphi} = R_1(1 + k^2).$$

Le rayon de torsion est constant, comme étant dans un rapport constant avec le rayon de courbure. *Toute courbe qui a sa courbure et sa torsion constantes est une hélice circulaire*. C'est une hélice, puisque le rapport R : T est constant; et la section droite du cylindre qui la porte est un cercle, puisque son rayon de courbure R_1, étant dans un rapport constant avec R, est lui aussi constant.

Le lieu des centres de courbure d'une hélice circulaire est une hélice circulaire de même axe et dont le lieu des centres de courbure est l'hélice proposée. On a vu, en effet, que la normale principale d'une hélice est la normale au cylindre sur lequel la courbe est tracée. Dans le cas actuel, la normale principale en tout point M de l'hélice donnée rencontre l'axe Oz du cylindre,

qui est de révolution. Le centre de courbure correspondant μ est distant de cet axe d'une longueur

$$\rho_1 = R_1 - R = R_1 k^2,$$

il est donc sur un cylindre de révolution ayant pour axe l'axe de l'hélice considérée. Or si l'on compte les arcs s_1 et σ des sections droites des deux cylindres à partir des génératrices d'un point M et de son centre de courbure μ, ces deux arcs seront dans un rapport constant; comme le z du point μ, que nous appellerons ζ, est égal à celui du point M, on voit qu'il varie proportionnellement à σ. Ainsi le lieu du point μ est une hélice circulaire ayant même axe que la première. Des relations

$$\sigma = s_1 \frac{\rho_1}{R_1}, \qquad \zeta = \varkappa\sigma = \varkappa \frac{\rho_1}{R_1} s_1 = \varkappa k^2 s_1, \qquad \zeta = z = k s_1,$$

on déduit $\varkappa k = 1$, ce qui prouve que le centre de courbure de la seconde hélice pour le point μ est le point M lui-même. En effet, il est sur la droite μM et sa distance à Oz est

$$\rho_1 \varkappa^2 = R_1 k^2 \varkappa^2 = R_1.$$

Il y a donc réciprocité entre les deux hélices : chacune d'elles est le lieu des centres de courbure de l'autre.

III. — Développantes.

6. *Définitions.* — Quand les tangentes d'une courbe (C) sont normales à une courbe (C_0), on dit que (C_0) est une *développante* de (C) et que (C) est une *développée* de (C_0).

Cherchons d'abord les développantes d'une courbe (C). Sur chaque tangente à cette courbe il s'agit de porter à partir du point de contact M(x, y, z) un segment l, tel que le lieu de son extrémité M_0 coupe toutes ces tangentes sous un angle droit. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées des points M_0 de la développante. Nous aurons

$$x_0 = x + \alpha l, \qquad y_0 = y + \beta l, \qquad z_0 = z + \gamma l.$$

On déduit de là par différentiation

$$dx_0 = dx + \alpha\, dl + l\, d\alpha = \alpha(ds + dl) + l\, d\alpha,$$

et deux expressions analogues pour dy_0 et dz_0; dans ces formules s représente l'arc de la courbe (C). La condition d'orthogonalité des tangentes en M et M_0

$$\alpha\, dx_0 + \beta\, dy_0 + \gamma\, dz_0 = 0,$$

formée avec les différentielles précédentes, se réduit à $ds + dl = 0$, d'où, par une intégration immédiate, on conclut

$$(6) \qquad l + s = \text{const.} = C, \qquad l = C - s.$$

Donc, *pour avoir une développante d'une courbe* (C), *il faut porter sur chacune de ses tangentes, à partir de son point de contact* M, *et dans le sens des arcs croissants, une longueur qui, ajoutée à l'arc compris sur la courbe* (C) *entre une origine fixe et le point* M, *donne une somme constante.*

7. Du théorème que nous venons d'établir résultent diverses conséquences.

1° *Toute courbe admet une infinité de développantes;* car, à chaque valeur de la somme constante $l + s$ correspond une courbe qui coupe à angle droit les tangentes de la proposée.

2° *La détermination des développantes d'une courbe donnée dépend d'une quadrature,* puisqu'il faut connaître l'arc de la proposée pour construire les développantes point par point.

3° On est conduit à un tracé continu de ces courbes en observant que *la variation du segment* MM_0 *entre deux points de la proposée est égale à l'arc compris entre ces deux points.* Soient en effet M et M' les points de la courbe (C); désignons par s_m et $s_{m'}$ les arcs qu'ils terminent, par M_0 et M'_0 les points correspondants d'une développante (C_0). On a

$$MM_0 + s_m = C, \qquad M'M'_0 + s_{m'} = C,$$

d'où l'on déduit par soustraction

$$MM_0 - M'M'_0 = s_{m'} - s_m = \text{arc}\, MM'.$$



Cela étant, considérons un fil flexible et inextensible, de longueur donnée, attaché par une de ses extrémités en un point fixe S de la courbe (C); une partie du fil est enroulée sur cette courbe de S en M, l'autre partie est tendue suivant la tangente en M. Quand on fait varier le point M sur la courbe, l'extrémité mobile du fil se meut sur une développante de (C).

Il faut remarquer que la démonstration de la formule (6) implique la continuité des cosinus directeurs de la tangente, menée toujours dans le sens des arcs croissants. La conclusion et la construction que nous en avons déduites cessent donc d'être justifiées si l'arc MM' présente un point où ces cosinus varient brusquement, ce qui arrive notamment en un point de rebroussement de première espèce.

4° *Les développantes d'une courbe sont toutes tracées sur la développable formée par les tangentes à cette courbe.* En particulier, si *une courbe est plane, toutes ses développantes sont situées dans son plan et elle est l'enveloppe de leurs normales principales.*

C'est là une propriété qui n'appartient qu'aux courbes planes : *si les normales principales d'une courbe ont une enveloppe, cette courbe est plane,* d'où il résulte que l'enveloppe de ses normales principales est plane. Pour établir ce théorème, supposons que la normale principale $M_0 N_0$ d'une courbe (C_0) engendre une développable. Le plan tangent en M_0 à cette développable est déterminé par la génératrice $N_0 M_0$ et par la tangente $M_0 T_0$ à la courbe (C_0) tracée sur la surface; par suite il se confond avec le plan osculateur de (C_0) en M_0. La caractéristique du plan osculateur sera donc la normale principale, tandis que c'est la tangente (Chap. III, n° 17). Il faut, en conséquence, qu'elle soit indéterminée, ou que le plan osculateur soit fixe, c'est-à-dire que la courbe (C_0) soit plane.

Remarque. — Les développantes d'une courbe étant les trajectoires orthogonales de ses tangentes, on voit que *les trajectoires orthogonales des génératrices d'une développable sont déterminées par une quadrature,* celle qui exprime l'arc de son arête de rebroussement.



8. *Exemple I.* — D'après ce qui précède, les développantes d'une courbe plane (C) sont toutes situées dans le plan de cette courbe; elles ont les mêmes normales et les segments interceptés par deux d'entre elles sur toutes ces normales ont même longueur. C'est ce qu'on exprime en disant que toutes les développantes d'une courbe plane sont des *courbes parallèles*.

Appliquons à la *chaînette* (*fig.* 4, p. 79) la construction indiquée plus haut; le point S étant pris sur la branche de droite et le fil terminé au sommet A, son extrémité L, qui joue ici le rôle du point M_0, décrit une développante de la chaînette, puisque le segment ML est égal à l'arc AM. La tangente LP de cette courbe étant égale au paramètre a, le lieu du point L est une *tractrice* (Chap. III, n° 4). Ainsi *l'une des développantes d'une chaînette est une tractrice.*

Exemple II. — Proposons-nous de trouver les développantes d'une hélice. Soit M un point de la courbe; coupons le cylindre qui porte l'hélice par un plan de section droite contenant l'origine S des arcs de l'hélice; soient M_1 la projection de M, et T la trace de la tangente en M sur ce plan. La droite M_1T, étant la projection de MT, est la tangente à la section droite. Désignons l'angle MTM_1 par φ, l'arc SM_1 par s_1; en vertu de la définition de l'hélice et de la propriété du triangle rectangle, on aura

$$M_1M = s_1 \operatorname{tang}\varphi, \qquad M_1M = M_1T \operatorname{tang}\varphi;$$

d'où $M_1T = s_1$. D'après cela, le lieu du point T est une développante de la section droite; sa tangente en T est perpendiculaire à M_1T, et par suite à MT. Ce lieu est donc aussi une développante de l'hélice. On obtiendra chacune des autres en portant une longueur constante sur les tangentes MT à partir du point T. Mais, toutes les tangentes MT ayant même inclinaison sur le plan de section droite, les points ainsi obtenus formeront une courbe plane qui se projettera sur le plan de la première suivant une autre développante de la section droite. Ainsi *toutes les développantes d'une hélice sont des courbes tracées dans des plans parallèles, et égales aux diverses développantes de la section droite du cylindre qui porte cette hélice.*



IV. — Développées.

9. Pour déterminer les développées d'une courbe (C), nous allons chercher s'il existe, en chaque point M de cette courbe, une normale MN′ qui reste tangente au lieu d'un de ses points M_1 lorsque M décrit (C); ce lieu sera une développée. Le point M_1 peut être déterminé par ses coordonnées a et b, relativement à la normale principale et à la binormale de (C) au point $M(x, y, z)$. Ses coordonnées absolues seront alors

$$x_1 = x + a\alpha' + b\alpha'', \qquad y_1 = y + a\beta' + b\beta'', \qquad z_1 = z + a\gamma' + b\gamma''.$$

Exprimons que le lieu de ce point est tangent à MM_1; il faudra écrire que les différentielles dx_1, dy_1, dz_1 sont proportionnelles à $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$. Or, en ayant égard aux formules de Frenet, on trouve aisément

$$(7) \qquad dx_1 = \alpha\left(1 - \frac{a}{R}\right) ds + \alpha'\left(da + \frac{b\,ds}{T}\right) + \alpha''\left(db - \frac{a\,ds}{T}\right).$$

Nous aurons donc, en désignant par $h\,ds$ un facteur de proportionnalité,

$$dx_1 = h(x_1 - x)\,ds = h(a\alpha' + b\alpha'')\,ds,$$

et deux relations analogues pour les deux autres coordonnées. Ces trois équations, développées et ordonnées, deviennent

$$\alpha\left(1 - \frac{a}{R}\right) ds + \alpha'\left(da + \frac{b\,ds}{T} - ah\,ds\right) + \alpha''\left(db - \frac{a\,ds}{T} - bh\,ds\right) = 0,$$

$$\beta\left(1 - \frac{a}{R}\right) ds + \beta'\left(da + \frac{b\,ds}{T} - ah\,ds\right) + \beta''\left(db - \frac{a\,ds}{T} - bh\,ds\right) = 0,$$

$$\gamma\left(1 - \frac{a}{R}\right) ds + \gamma'\left(da + \frac{b\,ds}{T} - ah\,ds\right) + \gamma''\left(db - \frac{a\,ds}{T} - bh\,ds\right) = 0.$$

C'est là un système linéaire et homogène par rapport aux trois expressions entre parenthèses; son déterminant n'étant pas nul, ce système exige

$$(8) \quad 1 - \frac{a}{R} = 0, \qquad da + \frac{b\,ds}{T} - ah\,ds = 0, \qquad db - \frac{a\,ds}{T} - bh\,ds = 0.$$

La première de ces relations montre que le point M_1 est sur la droite polaire. Donc *toutes les développées d'une courbe sont sur sa surface polaire.*

L'élimination de h entre les équations (8) donne

$$\frac{a\,db - b\,da}{a^2 + b^2} = d \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} = \frac{ds}{T}.$$

Si donc on désigne par φ l'angle dont tourne une droite, primitivement dirigée suivant la normale principale, pour venir coïncider avec MM_1, le sens de la rotation étant celui qui amène la demi-droite MN à coïncider avec MB après un quart de tour, on aura

$$(9) \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} = \int \frac{ds}{T}.$$

L'angle φ étant ainsi déterminé, on a $b = a \operatorname{tang}\varphi$, et, comme a est égal au rayon de courbure R, les coordonnées de la développée ont pour expressions :

$$(10) \qquad \begin{cases} x_1 = x + \alpha' R + \alpha'' R \operatorname{tang}\varphi, \\ y_1 = y + \beta' R + \beta'' R \operatorname{tang}\varphi, \\ z_1 = z + \gamma' R + \gamma'' R \operatorname{tang}\varphi. \end{cases}$$

10. La formule (9), qui définit l'angle φ, donne lieu à diverses conséquences :

1° Cet angle n'étant déterminé qu'à une constante additive près, on voit que *toute courbe a une infinité de développées*. On les déduit les unes des autres d'une façon simple : *ayant une famille de normales qui touchent une développée, si l'on fait tourner chacune d'elles, d'un même angle quelconque, autour de la tangente en son point d'incidence, on obtient une autre famille de normales enveloppant une autre développée.*

2° Nous avons démontré directement au n° 7 que les normales principales d'une courbe *gauche* n'ont pas d'enveloppe; c'est ce que prouve aussi la formule (9), car elle ne peut donner $\varphi = 0$, que si T est infini, hypothèse qui caractérise les courbes planes (Chap. IV, n° 6, *Rem.*).

3° Les diverses développées des courbes *planes* correspondent, T étant infini, à des valeurs constantes de φ. Pour $\varphi = 0$, on ob-

tient une développée plane. Les autres développées coupent les droites polaires sous l'angle $90° - \varphi$, constant tout le long de chacune d'elles. Par suite (n° 4) *les développées d'une courbe plane sont les hélices tracées sur le cylindre qui a pour section droite la développée plane.* Réciproquement, *toute hélice est l'une des développées d'une infinité de courbes planes,* ainsi qu'il a été démontré à la fin du paragraphe précédent.

4° Pour trouver les développées, planes ou gauches, des courbes planes, il n'est besoin que de différentiations. Au contraire, les développées des courbes gauches dépendent d'une quadrature, celle qui donne l'angle φ.

11. Voici quelques propriétés générales des développées. De la théorie des développantes (n° 7) il résulte que *l'arc* $M_1M'_1$, *compris entre deux points d'une développée, est égal à la variation du segment* MM_1. En effet, ce segment est celui qu'il faut porter sur les tangentes à la développée (C_1) pour obtenir la proposée (C), qui est l'une de ses développantes. Si la proposée (C) est plane, et si la développée considérée est la développée plane, le segment MM_1 se confond avec le rayon de courbure de (C); ainsi *l'arc compris entre deux points d'une développée plane est égal à la variation du rayon de courbure de l'une de ses développantes entre les points qui correspondent à ses extrémités.* Cet énoncé, comme le précédent, suppose que, entre les points considérés, les cosinus directeurs de la tangente à la développée n'éprouvent point de variation brusque (n° 7, 3°).

Je vais étendre aux développées des courbes gauches une propriété des hélices. Soient R_1 et T_1 les rayons de courbure et de torsion d'une développée (C_1), φ l'angle déjà trouvé que font, avec les normales principales de la développante (C), les tangentes de (C_1). Je dis qu'*on a toujours* $R_1 = - T_1 \tang\varphi$, comme pour les hélices. En effet, le plan rectifiant d'une courbe quelconque, lieu du point (x, y, z), a pour caractéristique une droite dont les équations sont

$$(X - x)\alpha' + (Y - y)\beta' + (Z - z)\gamma' = 0,$$

$$(X - x)\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T}\right) + (Y - y)\left(\frac{\beta}{R} + \frac{\beta''}{T}\right) + (Z - z)\left(\frac{\gamma}{R} + \frac{\gamma''}{T}\right) = 0,$$

la seconde résultant de la différentiation de la première. Prenons pour axes des x, des y et des z respectivement les trois directions principales de la courbe; d'où résulte $\alpha = \beta' = \gamma'' = 1$, les autres cosinus étant nuls. La caractéristique cherchée ou *droite rectifiante* aura pour équations

$$Y - y = 0,$$
$$T(X - x) + R(Z - z) = 0,$$

ce qui montre qu'elle fait avec la tangente un angle μ, tel que $R = - T \cot \mu$. Or, je dis que la droite rectifiante de (C_1) est la droite polaire de (C), ce qui donnera

$$R_1 = - T_1 \cot \mu = - T_1 \operatorname{tang} \varphi,$$

l'angle μ de la droite polaire avec MM_1 étant le complément de φ. Il reste à prouver que le plan rectifiant de (C_1) est le plan normal de (C), ou bien que *la normale principale de* (C_1) *est parallèle à la tangente de* (C). Or (C_1) est l'arête de rebroussement de la développable engendrée par MM_1; cette développable contient la courbe (C), et son plan tangent en M est le plan de $M_1 M$ et de la tangente MT à (C); c'est aussi le plan tangent en M_1, qui se confond avec le plan osculateur à (C_1). Dès lors, la normale principale à (C_1) en M_1, étant menée dans le plan TMM_1 perpendiculairement à $M_1 M$, est parallèle à MT.

En vertu du théorème précédent, il suffit, pour connaître la courbure et la torsion d'une développée, de déterminer son rayon de courbure R_1. Pour l'obtenir, désignons par des lettres affectées de l'indice 1 l'arc et les cosinus des directions principales de l'une des développées (C_1) d'une courbe (C). Les points (x, y, z) de la développante (C) sont liés aux points (x_1, y_1, z_1) de (C_1) par les formules

$$x = x_1 + l\alpha_1, \qquad y = y_1 + l\beta_1, \qquad z = z_1 + l\gamma_1,$$

l étant une longueur telle qu'on ait $dl = ds_1$.

Différentions les formules précédentes en tenant compte de cette relation. Nous trouvons

$$\alpha\, ds = l\, d\alpha_1, \qquad \beta\, ds = l\, d\beta_1, \qquad \gamma\, ds = l\, d\gamma_1,$$

ou, à raison des formules fondamentales,

$$\alpha\, ds = \frac{l\alpha'_1}{R_1}\, ds_1, \qquad \beta\, ds = \frac{l\beta'_1}{R_1}\, ds_1, \qquad \gamma\, ds = \frac{l\gamma'_1}{R_1}\, ds_1.$$

Élevons au carré et ajoutons ; il viendra

$$ds^2 = \frac{l^2}{R_1^2}\, ds_1^2 = \frac{l^2}{R_1^2}\, dl^2,$$

d'où résulte pour R_1 cette expression remarquable

$$R_1 = \pm \frac{l\, dl}{ds}.$$

Mais, d'après la détermination des développées (n° 9), nous avons

$$l = \frac{R}{\cos\varphi}, \qquad \varphi = \int \frac{ds}{T}.$$

Substituant ces valeurs dans la formule précédente, on trouve

$$R_1 = \pm \frac{R}{\cos^2\varphi}\left(\frac{dR}{ds} + \frac{R}{T}\operatorname{tang}\varphi\right).$$

Telle est l'expression du rayon de courbure d'une développée, en fonction des éléments de la proposée.

V. — Équations intrinsèques des courbes gauches.

12. On appelle *équations intrinsèques* d'une courbe les formules qui font connaître sa courbure et sa torsion en fonction de son arc. Nous allons démontrer que la connaissance de ces deux éléments détermine complètement la forme d'une courbe.

Théorème. — *Si deux courbes gauches* (C) *et* (C_1) *sont telles que leurs courbures et leurs torsions soient respectivement les mêmes fonctions de leurs arcs, on peut les faire coïncider.*

Pour le prouver, faisons coïncider les points O et O_1 pris sur (C) et (C_1) pour origines des arcs; faisons coïncider aussi les trièdres principaux des deux courbes relatifs à ces deux points. Appelons s l'arc des deux courbes, R, T leurs rayons de courbure et de torsion aux points M et M_1 qui correspondent à la

même valeur de s; soient x, y, z les coordonnées du point M et α, β, ..., γ'' les neuf cosinus des directions principales en ce point; pour les éléments analogues de la courbe (C_1) relatifs au point M_1, nous emploierons les mêmes lettres affectées de l'indice 1. Nous aurons, *pour* $s=0$,

$$x_1=x,\quad y_1=y,\quad z_1=z;\qquad \alpha_1=\alpha,\quad \ldots,\quad \gamma''_1=\gamma''.$$

Cela posé, les formules fondamentales donnent, pour les deux courbes,

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'}{R},\qquad \frac{d\alpha'}{ds}=-\frac{\alpha}{R}-\frac{\alpha''}{T},\qquad \frac{d\alpha''}{ds}=\frac{\alpha'}{T},$$
$$\frac{d\alpha_1}{ds}=\frac{\alpha'_1}{R},\qquad \frac{d\alpha'}{ds}=-\frac{\alpha_1}{R}-\frac{\alpha''_1}{T},\qquad \frac{d\alpha''}{ds}=\frac{\alpha'_1}{T}.$$

De ces relations, on déduit aisément

$$\frac{d}{ds}(\alpha\alpha_1+\alpha'\alpha'_1+\alpha''\alpha''_1)=0.$$

Ainsi l'expression dont la dérivée figure au premier membre est constante; or pour $s=0$ elle se réduit à l'unité. On a donc, *quel que soit* s,

$$\alpha\alpha_1+\alpha'\alpha'_1+\alpha''\alpha''_1=1.$$

Rapprochant de cette relation les deux identités

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1,\qquad \alpha_1^2+\alpha_1'^2+\alpha_1''^2=1,$$

on trouve, par une combinaison évidente,

$$(\alpha_1-\alpha)^2+(\alpha'_1-\alpha')^2+(\alpha''_1-\alpha'')^2=0;$$

d'où l'on déduit en particulier $\alpha_1=\alpha$. On trouverait de même $\beta_1=\beta$, $\gamma_1=\gamma$. On a donc toujours

$$\frac{dx_1}{ds}=\frac{dx}{ds},\qquad \frac{dy_1}{ds}=\frac{dy}{ds},\qquad \frac{dz_1}{ds}=\frac{dz}{ds},$$

ce qui prouve que les différences x_1-x, y_1-y et z_1-z sont constantes. Étant nulles pour $s=0$, elles sont toujours nulles, de sorte que les deux courbes (C) et (C_1) coïncident.

Remarque. — La proposition précédente permet, quand on connaît une courbe dont les rayons de courbure et la torsion sont

des fonctions données de l'arc

$$R = R(s), \qquad T = T(s),$$

d'affirmer que toute courbe qui satisfait aux mêmes équations ne peut différer de la première que par sa position dans l'espace, non par sa forme. Cette proposition est donc, à certains égards, l'analogue de celle que nous avons démontrée pour les courbes planes (Chap. IV, n° **12**); mais elle est moins complète, car elle n'établit pas l'existence d'une courbe vérifiant les équations intrinsèques données. C'est la question qui va maintenant nous occuper.

13. Théorème. — *Étant données deux fonctions continues d'une variable s,*

$$\frac{1}{R} = \omega(s), \qquad \frac{1}{T} = \varpi(s),$$

dont la première est toujours positive, il existe une courbe dont s mesure l'arc et dont la courbure et la torsion au point qui termine l'arc s sont représentées respectivement par les fonctions ω *et* ϖ.

Je dis d'abord que si (l, m, n), (l', m', n'), (l'', m'', n'') *sont trois systèmes d'intégrales des équations simultanées*

$$(11) \qquad \frac{dl}{ds} = \frac{m}{R}, \qquad \frac{dm}{ds} = -\frac{l}{R} - \frac{n}{T}, \qquad \frac{dn}{ds} = \frac{m}{T};$$

si, de plus, ces fonctions vérifient les six équations

$$(12) \qquad \begin{cases} l^2 + l'^2 + l''^2 = 1, & lm + l'm' + l''m'' = 0, \\ m^2 + m'^2 + m''^2 = 1, & mn + m'n' + m''n'' = 0, \\ n^2 + n'^2 + n''^2 = 1, & nl + n'l' + n''l'' = 0, \end{cases}$$

et si leur déterminant

$$(12') \qquad n(l'm'' - m'l'') + n'(l''m - m''l) + n''(lm' - ml')$$

est égal à $+1$, *les fonctions* R *et* T *sont les rayons de courbure et de torsion de la courbe définie par les formules*

$$x = \int l\,ds, \qquad y = \int l'\,ds, \qquad z = \int l''\,ds,$$

pourvu que la fonction R soit toujours positive. En effet, on a

$$\frac{dx}{ds} = l, \quad \frac{dy}{ds} = l', \quad \frac{dz}{ds} = l'', \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

ce qui prouve tout d'abord que s est l'arc de la courbe considérée (C), et que l, l', l'' sont les cosinus α, β, γ de sa tangente menée dans le sens des arcs croissants. De plus, la première équation différentielle (11) donne

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{m}{R}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{m'}{R}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{m''}{R},$$
$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2.$$

On en conclut, R *étant positif*, que c'est le rayon de courbure de la courbe (C); et, puisqu'on a

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{m}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{m'}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{m''}{R},$$

on voit par comparaison avec les formules de Frenet que m, m', m'' sont les cosinus α', β', γ' de la normale principale.

Dès lors n, n', n'', qui, en vertu des hypothèses (12), ne peuvent différer que par le signe des cosinus α'', β'', γ'' de la binormale, leur sont égaux, puisque le déterminant

$$n(\beta\gamma' - \gamma\beta') + n'(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') + n''(\alpha\beta' - \beta\alpha')$$

est égal à $+1$. Par suite, la troisième équation différentielle (11) donne

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \quad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta}{T}, \quad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T},$$

ce qui, d'après les formules fondamentales, prouve que T est le rayon de torsion.

Ce lemme établi, désignons par l, m, n trois fonctions inconnues de la variable s et considérons les équations différentielles (11). Si (l, m, n) et (l', m', n') sont deux systèmes, distincts ou confondus, d'intégrales de ces équations, on aura visiblement

$$\frac{d}{ds}(ll' + mm' + nn') = 0,$$
$$ll' + mm' + nn' = \text{const.}$$

Or on sait que, étant donnés trois nombres arbitraires l_0, m_0, n_0, il existe un système d'intégrales (l, m, n) qui prennent ces valeurs pour $s = 0$. Si donc nous considérons neuf constantes

$$(l_0, m_0, n_0), \qquad (l'_0, m'_0, n'_0), \qquad (l''_0, m''_0, n''_0),$$

vérifiant les six équations (12) et dont le déterminant soit égal à $+1$, il existera trois systèmes d'intégrales

$$(l, m, n), \qquad (l', m', n'), \qquad (l'', m'', n'')$$

des équations (11), qui pour $s = 0$ se réduiront respectivement à ces neuf constantes.

Mais nous venons de prouver que les six expressions telles que

$$l^2 + m^2 + n^2, \qquad ll' + mm' + nn',$$

c'est-à-dire les premiers membres des équations (12), ont des valeurs constantes. Elles auront donc constamment les valeurs 1, 1, 1, 0, 0, 0 qu'elles ont pour $s = 0$ et le déterminant (12') sera égal à $+1$. Ainsi seront réalisées toutes les conditions du lemme précédent, ce qui démontre l'existence de la courbe cherchée.

L'intégration des équations (11) revient à celle d'une équation de Riccati. En effet, tout système d'intégrales (l, m, n) peut être supposé tel que la somme $l^2 + m^2 + n^2$ soit égale à l'unité, puisqu'elle est constante. On est ainsi conduit à poser

$$l = \sin\theta \cos\varphi, \qquad m = \sin\theta \sin\varphi, \qquad n = \cos\theta\,;$$

et si l'on substitue ces expressions dans les équations proposées, on reconnaît qu'elles se réduisent à deux, qui peuvent s'écrire

$$\frac{d\theta}{ds} + \frac{\sin\varphi}{T} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\cot\theta \cos\varphi}{T} + \frac{1}{R} = 0.$$

En introduisant comme inconnue la fonction complexe

$$\lambda = e^{i\varphi} \cot\theta,$$

on tire de ces équations la suivante

$$i\frac{d\lambda}{ds} + \frac{\lambda^2 - 1}{2T} - \frac{\lambda}{R} = 0,$$

qui, réciproquement, les entraîne, quand on sépare la partie réelle

de la partie imaginaire. C'est là une équation de Riccati, dont il suffira de connaître une intégrale complexe, pour avoir une courbe et, par suite, toutes les courbes répondant à la question.

VI. — Développements des coordonnées d'une courbe suivant les puissances de l'arc.

14. Les formules fondamentales permettent de calculer de proche en proche les dérivées successives des coordonnées d'une courbe par rapport à son arc. Désignons la courbure par ω, la torsion par ϖ, et indiquons par des accents les dérivées de ω et de ϖ par rapport à s. On a

$$(13)\qquad \frac{dx}{ds} = \alpha, \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\alpha}{ds} = \omega\alpha', \quad \frac{d^3x}{ds^3} = \omega'\alpha' - \omega(\omega\alpha + \varpi\alpha'').$$

En continuant à différentier, on obtiendra pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ une expression de la forme

$$\frac{d^nx}{ds^n} = P_n\alpha + Q_n\alpha' + R_n\alpha'',$$

où P_n, Q_n, R_n dépendent de ω et de ses $n-2$ premières dérivées, de ϖ et de ses $n-3$ premières dérivées, comme on s'en assure aisément. Les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de y et de z seront composées avec les cosinus β, β', β'', γ, γ', γ'' affectés des mêmes coefficients :

$$\frac{d^ny}{dx^n} = P_n\beta + Q_n\beta' + R_n\beta'', \qquad \frac{d^nz}{dx^n} = P_n\gamma + Q_n\gamma' + R_n\gamma''.$$

Connaissant ainsi les dérivées des trois coordonnées, on pourra développer x, y, z suivant les puissances de s par la formule de Maclaurin, si l'on se donne leurs valeurs et celles des neuf cosinus pour $s = 0$.

Nous calculerons les trois premiers termes de ces développements, en plaçant l'origine des coordonnées à l'origine des arcs et prenant respectivement, pour axes des x, des y et des z, la tangente, la normale principale et la binormale de la courbe considérée. On aura par suite, à l'origine, $\alpha = \beta' = \gamma'' = 1$ et les autres cosinus seront nuls. Si nous affectons de l'indice o toutes les valeurs relatives à l'origine, les formules (13) et leurs analogues

pour y et z donneront

$$x_0 = 0, \quad x'_0 = 1, \quad x''_0 = 0, \quad x'''_0 = -\omega_0^2;$$
$$y_0 = 0, \quad y'_0 = 0, \quad y''_0 = \omega_0, \quad y'''_0 = \omega'_0;$$
$$z_0 = 0, \quad z'_0 = 0, \quad z''_0 = 0, \quad z'''_0 = \omega_0\varpi_0;$$

d'où résultent les développements suivants :

$$(14) \quad x = s - \frac{\omega_0^2}{6}s^3 + \ldots, \quad y = \frac{\omega_0}{2}s^2 + \frac{\omega'_0}{6}s^3 + \ldots, \quad z = -\frac{\omega_0\varpi_0}{6}s^3 + \ldots.$$

Voici quelques conséquences importantes de ces formules :

1° *Une courbe traverse chacun de ses plans osculateurs en son point de contact.* — On voit en effet que, sauf dans le cas exceptionnel où l'on aurait $\omega_0\varpi_0 = 0$, à deux valeurs de s voisines de zéro, l'une positive, l'autre négative, correspondent pour z deux valeurs de signes contraires. La courbe passe donc d'un côté à l'autre de son plan osculateur.

Nous aurons à revenir sur cette importante propriété. Disons dès maintenant qu'on appelle *points stationnaires* les points pour lesquels elle ne se vérifie pas.

2° *La différence entre un arc infiniment petit et sa corde est du troisième ordre par rapport à cet arc.* — Calculons en effet, au moyen des formules (14), le carré c^2 de la corde qui sous-tend l'arc s; nous aurons

$$c^2 = x^2 + y^2 + z^2 = s^2\left(1 - \frac{\omega_0^2}{12}s^2 + \ldots\right);$$

d'où, en élevant les deux membres à la puissance $\frac{1}{2}$,

$$c = s\left(1 - \frac{\omega_0^2}{24}s^2 + \ldots\right), \qquad s - c = \frac{\omega_0^2}{24}s^3 + \ldots.$$

Ce résultat, indépendant de la torsion, est le même pour les courbes gauches que pour les courbes planes.

3° *Le rayon de courbure en un point* M *d'une courbe plane ou gauche est la limite commune des rapports* $\overline{\mathrm{MP}}^2 : 2\mathrm{M'P}$ *et* $\overline{\mathrm{MM'}}^2 : 2\mathrm{M'P}$, *où* M' *désigne un point voisin de* M *et* P *la projection de* M' *sur la tangente en* M. — Soit, en effet, s l'arc MM'; nous aurons

$$\mathrm{MP} = x, \qquad \mathrm{MM'} = c, \qquad \mathrm{M'P} = \sqrt{y^2 + z^2},$$

x, y, z et c représentant les développements précédents. Si l'on s'en tient aux parties principales, il viendra $MM' = MP = s$, $2M'P = \omega_0 s^2$, d'où résulte visiblement

$$R_0 = \frac{1}{\omega_0} = \lim \frac{\overline{MP}^2}{2M'P} = \lim \frac{\overline{MM'}^2}{2M'P}.$$

Ces expressions du rayon de courbure servent dans diverses questions.

4° *La plus courte distance de deux tangentes infiniment voisines est de l'ordre du cube de l'arc compris entre leurs points de contact.* — Soient M l'un des deux points, pris pour origine des arcs et des coordonnées, M' l'autre, s l'arc MM'; les formules (14) font connaître les coordonnées de M' et aussi les dérivées x', y', z' prises par rapport à s. La tangente en M' se projette sur le plan des yz suivant une droite dont l'équation est

$$z'(Y - y) - y'(Z - z) = 0,$$

et dont la distance à l'origine est égale à la distance δ des deux tangentes en M' et M, puisque cette dernière est perpendiculaire au plan des yz. On trouve ainsi, en effectuant les calculs indiqués,

$$\delta = \frac{zy' - yz'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}} = \frac{\omega_0 \varpi_0}{12} s^3 + \ldots.$$

On voit qu'aux *points stationnaires* la distance δ est d'un ordre supérieur à trois.

VII. — Signe de la torsion.

15. Nous avons reconnu, en déterminant le rayon de torsion (Chap. IV, n° 6), que son signe est indépendant du sens dans lequel sont comptés les arcs. C'est ce qu'on vérifie sur celles des formules fondamentales où figure T. Écrivons en effet la première de chacun des groupes (II) et (III)

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \qquad \frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}.$$

Si l'on change le sens des arcs croissants, c'est-à-dire le sens de

la tangente, comme celui de la normale principale ne peut changer, il faut, pour laisser au trièdre principal sa disposition primitive, changer le sens de la binormale. Ainsi α, β, γ et α'', β'', γ'' changent de signe en même temps que ds. On voit que cela ne modifie point le signe de T.

Les deux signes dont la torsion est susceptible correspondent aux deux allures opposées que peuvent présenter les courbes gauches. Une pareille courbe étant tracée dans l'espace, pour nous rendre compte de son allure en l'un de ses points M, imaginons qu'un observateur soit debout sur l'une des faces du plan osculateur en M, les pieds en un point quelconque de la normale principale, et qu'il regarde le point M, ainsi que les deux arcs de courbe séparés par ce point. Puisque la courbe traverse ce plan en M (nº 14, 1°), il verra l'un des deux arcs *au-dessous* du plan osculateur, l'autre *au-dessus*. Si l'arc *inférieur* est à sa *gauche,* il jugera qu'un point qui décrit la courbe en s'élevant *monte de gauche à droite;* on dit alors que l'allure de la courbe est *dextrorsum*. Si c'est l'arc *supérieur* que l'observateur voit à sa *gauche,* il jugera que la courbe *monte de droite à gauche* et dira que l'allure de la courbe est *sinistrorsum*.

Pour justifier cette distinction capitale, il faut s'assurer que la courbe présentera la même apparence à l'observateur, quelle que soit celle des deux faces du plan osculateur sur laquelle celui-ci sera debout, pourvu qu'il regarde toujours le point M et se place toujours du même côté du plan rectifiant, soit du côté du centre de courbure relatif au point M, soit du côté opposé. C'est ce dont il est aisé de se convaincre en imaginant l'observateur en présence de la courbe, dans les deux positions contraires qu'il peut occuper. Il est à peine besoin d'ajouter que la même courbe affecte aux yeux de l'observateur deux allures opposées, quand celui-ci passe d'un côté du plan rectifiant à l'autre côté.

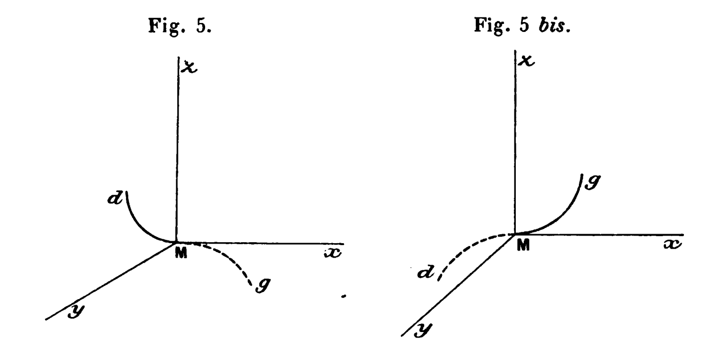
Il n'y a dans ce qui précède d'autre convention que la convention verbale qui fixe le sens des mots *dextrorsum* et *sinistrorsum*. Mais, pour rattacher le fait géométrique qui nous occupe au signe de la torsion, nous aurons égard à la convention que l'on fait d'habitude sur la disposition du trièdre des coordonnées et à celle que nous avons faite sur le signe de T (Chap. IV, nº 6). Nous conviendrons en outre de placer l'observateur *du côté du plan*

rectifiant où n'est pas le centre de courbure : de cette façon, si la courbe peut être tracée sur un cylindre fermé, l'observateur sera placé en dehors de ce cylindre.

Cela posé, rapportons, comme au n° **14**, une courbe (C) au trièdre principal relatif à l'un de ses points M, et comptons les arcs à partir de ce point. Nous avons trouvé, aux notations près,

$$x = s + \ldots, \qquad z = -\frac{6s^3}{RT} + \ldots.$$

Si donc T est *positif,* z et x sont de signes contraires aux environs du point M; c'est la disposition représentée sur la *fig.* 5. Le centre de courbure en M étant, par hypothèse, situé sur la



partie positive de l'axe My, l'observateur devra se mettre en arrière du plan des zx, et nous pouvons, d'après ce qui a été dit plus haut, le supposer placé du côté des z positifs. Il voit alors l'arc inférieur à sa gauche : l'allure de la courbe est *dextrorsum.*

Si, au contraire, T est *négatif,* z et x sont de même signe aux environs du point M; c'est la disposition représentée sur la *fig.* 5 *bis*. Or l'observateur étant toujours en arrière du plan des zx, l'arc inférieur est à sa droite : l'allure de la courbe en M est *sinistrorsum.*

En vertu du raisonnement des cas exclusifs, les réciproques sont vraies : *une courbe à torsion positive est dextrorsum, une courbe à torsion négative est sinistrorsum.*

Il va sans dire que, si l'on changeait la disposition des axes de coordonnées ou la situation de l'observateur, les conclusions précédentes s'échangeraient entre elles.

Exemple. — Considérons l'hélice circulaire définie par les équations

$$x = R_1 \cos \frac{s_1}{R_1}, \qquad y = R_1 \sin \frac{s_1}{R_1}, \qquad z = k s_1,$$

où R_1 est le rayon du cylindre qui porte la courbe. Si l'on calcule le rayon de torsion T, en appliquant la formule (23) du Chapitre IV, on trouve aisément

$$T = - R_1 \left(k + \frac{1}{k} \right).$$

On voit donc que, *si k est positif, l'hélice est sinistrorsum; si k est négatif, l'hélice est dextrorsum,* le trièdre des coordonnées ayant la disposition habituelle figurée ci-dessus.

Remarque. — Considérons deux courbes gauches, symétriques l'une de l'autre par rapport à un plan, celui des xy par exemple. Tout point (x, y, z) de l'une a pour symétrique le point $(x, y, -z)$ de l'autre. Or il est évident que, si l'on change le signe des trois dérivées z', z'', z''', l'expression de T change de signe. Donc, *si deux courbes sont symétriques par rapport à un plan, elles ont en leurs points correspondants des torsions égales et de signes contraires.*

Réciproquement, *si deux courbes ont, aux extrémités d'arcs égaux, leurs courbures égales, leurs torsions égales et de signes contraires, l'une d'elles peut être rendue symétrique de l'autre par rapport à un plan.* En effet, une courbe (C) et sa symétrique (Γ) ont, en leurs points correspondants, des torsions égales et de signes contraires; leurs courbures sont d'ailleurs les mêmes en ces points. Si donc $\omega(s)$ et $\varpi(s)$ représentent la courbure et la torsion d'une courbe (C), toute courbe (C′), qui a pour courbure $\omega(s)$, pour torsion $-\varpi(s)$, a même courbure et même torsion que la courbe (Γ) symétrique de (C). Or on a vu (n° 12) que si deux courbes ont leurs courbures et leurs torsions exprimées respectivement par les mêmes fonctions de leur arc, elles sont superposables. En conséquence, toute courbe (C′) est égale à une symétrique (Γ) de (C), ce qui justifie notre assertion.

CHAPITRE VI.

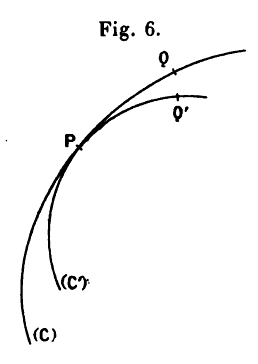
CONTACTS DES COURBES ET DES SURFACES.

I. — Contact de deux courbes planes.

1. Quand deux courbes (C) et (C′) ont en commun un point simple P, on dit qu'elles ont en ce point un *contact d'ordre n*, si à tout point Q infiniment voisin de P sur la courbe (C) on peut faire correspondre sur la courbe (C′) un point Q′ tel que la distance QQ′ soit un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à la corde PQ.

Pour traduire analytiquement cette définition, appelons x, y les coordonnées de P; x_1, y_1 celles de Q; $x_1+\alpha$, $y_1+\beta$ celles

Fig. 6.



de Q′, et représentons la courbe (C′) par l'équation $F(x,y)=0$. Le point Q′ étant sur cette courbe, on aura

$$0 = F(x_1+\alpha, y_1+\beta) = F(x_1, y_1) + \alpha F'_{x_1} + \beta F'_{y_1} + \ldots .$$

Mais, si θ est l'angle des axes, on a

$$QQ' = \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\theta + \beta^2},$$

ce qui montre que l'une des quantités α et β est d'ordre $n+1$ par rapport à PQ, l'autre pouvant être d'un ordre supérieur. Par suite, *l'expression* $F(x_1, y_1)$ *est d'ordre* $n+1$.

Réciproquement, si $F(x_1, y_1)$ est de l'ordre $n+1$, choisissons arbitrairement pour α une expression de l'ordre $n+1$; l'équation ci-dessus donnera pour β une expression qui sera aussi de l'ordre $n+1$, et il en sera de même de la distance QQ'. Les deux courbes auront un *contact d'ordre n*.

Le raisonnement suppose que les dérivées F'_{x_1} et F'_{y_1} ne sont pas infiniment petites toutes les deux. S'il en était ainsi, les deux dérivées F'_x et F'_y, qui diffèrent infiniment peu de F'_{x_1} et F'_{y_1}, *ayant des valeurs fixes,* seraient rigoureusement nulles. Le point P ne serait pas un point simple pour la courbe (C').

En conséquence, *pour que deux courbes* (C) *et* (C') *aient en un point* P *un contact d'ordre n, il faut et il suffit que les coordonnées d'un point* Q *infiniment voisin de* P *sur* (C), *étant substituées dans le premier membre de l'équation de la courbe* (C'), *donnent un résultat de l'ordre* $n+1$ *par rapport à la distance* PQ.

2. Supposons la courbe (C) définie par les expressions de ses coordonnées en fonction d'un paramètre

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t).$$

Soient t et $t+dt$ les valeurs de ce paramètre auxquelles correspondent les points P et Q. Le point P étant un point simple de (C), la corde PQ est du même ordre que dt (Chap. I, n° 4).

Si maintenant on substitue $x+x'\,dt$, $y+y'\,dt$ à x et y dans F, on devra trouver un résultat de l'ordre $n+1$ par rapport à dt; c'est-à-dire que, si l'on pose

$$\psi(t) = F[\varphi_1(t), \varphi_2(t)],$$

le développement de $\psi(t+dt)$ suivant les puissances de dt commencera par un terme en dt^{n+1}. Ceci entraîne les conditions

$$\psi(t) = 0, \qquad \psi'(t) = 0, \qquad \ldots, \qquad \psi^{(n)}(t) = 0,$$

qui sont au nombre de $n+1$. Ainsi, *il faut* $n+1$ *conditions pour exprimer que deux courbes planes ont en un point donné un contact d'ordre n.*

Supposons maintenant les deux courbes représentées par des équations résolues

$$F(x, y) = y - f(x) = 0; \qquad x = t, \qquad y = \varphi_2(t).$$

La fonction $\psi(t)$ ne sera pas autre chose que la différence $\varphi_2(t) - f(t)$ ou $\varphi_2(x) - f(x)$ des ordonnées des deux courbes répondant à une même abscisse. Donc, *pour que deux courbes aient en un point donné un contact d'ordre n, il faut et il suffit que l'ordonnée et ses n premières dérivées prises par rapport à l'abscisse aient les mêmes valeurs pour les deux courbes en ce point.*

Cette règle donne le moyen d'exprimer les conditions de contact pour deux courbes représentées par les équations non résolues

$$F(x, y) = 0, \qquad \Phi(x, y) = 0.$$

Il suffira de former, par les règles connues pour la différentiation des fonctions implicites, les équations qui déterminent les n premières dérivées des deux fonctions y de la variable x. On aura ainsi, avec les équations des deux courbes, deux groupes de $n+1$ relations entre les paramètres $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ supposés avoir les mêmes valeurs dans les deux groupes pour l'abscisse x du point donné. En éliminant ces $n+1$ quantités on obtiendra les $n+1$ conditions de contact.

Remarque. — Pour exprimer que deux courbes ont, en un point *indéterminé* x, y du plan, un contact d'ordre n, on procédera de même. Seulement on devra aussi éliminer x, de sorte qu'il ne restera plus que n équations de condition.

II. — Courbes osculatrices dans le plan.

3. Considérons un système de courbes (C') dépendant de $n+1$ paramètres, et un point P d'une courbe fixe (C). On pourra établir un contact d'ordre n au point P entre (C) et une ou plusieurs des courbes du système, en déterminant les $n+1$ paramètres. Ces courbes, dont l'ordre de contact est le plus élevé possible parmi celles de l'espèce considérée, sont dites *osculatrices* à la courbe (C).

La droite, dépendant de deux paramètres, peut avoir avec une courbe un contact du premier ordre. Alors son ordonnée et la dérivée de cette ordonnée par rapport à l'abscisse ont même valeur que celles de la courbe; ainsi *la droite osculatrice se confond avec la tangente,* leurs coefficients angulaires étant les mêmes en un point commun. Pour qu'une courbe et sa tangente aient un contact d'ordre supérieur au premier, il faut que les dérivées secondes de leurs ordonnées soient égales. On doit donc avoir en ces points, pour la courbe comme pour la droite, $y'' = 0$, ce qui caractérise les points d'inflexion.

Le cercle, dépendant de trois paramètres, est osculateur à une courbe quand il a un contact du second ordre avec elle. Soit, en coordonnées rectangulaires

$$(1) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \rho^2 = 0,$$

l'équation d'un cercle osculateur au point $M(x, y)$ à une courbe (C). Différentions deux fois cette équation par rapport à x et retenons que y' et y'' sont égales aux dérivées de l'ordonnée de (C). Nous trouvons

$$(2) \qquad x - x_1 + (y - y_1)y' = 0,$$

$$(3) \qquad 1 + y'^2 + (y - y_1)y'' = 0.$$

Or, si l'on y considère x_1 et y_1 comme des coordonnées courantes, l'équation (2) représente la normale à (C) en M; l'équation (3) est son équation dérivée. Donc, le centre du cercle osculateur coïncide avec le centre de courbure et *le cercle osculateur se confond avec le cercle de courbure.*

Le cercle osculateur a un contact du troisième ordre avec la courbe aux points où le rayon de courbure est maximum ou minimum, et réciproquement. Différentions, en effet, une troisième fois l'équation (1); il vient

$$(4) \qquad 3y'y'' + (y - y_1)y''' = 0,$$

et la dérivée y''' est par hypothèse égale à celle de l'ordonnée de la courbe. Éliminons $y - y_1$ entre les deux relations (3) et (4) : nous trouvons

$$(5) \qquad 3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''' = 0,$$

ce qui exprime précisément que la dérivée du rayon de courbure

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

est égale à zéro. Ainsi R est maximum ou minimum. D'autre part, l'équation (5), jointe à l'équation (3), entraîne l'équation (4), ce qui démontre la réciproque.

Voici encore un exemple simple de courbe osculatrice. Étant donnée une courbe $y = f(x)$, on cherche, parmi les paraboles de degré n,

$$y = \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

celle qui est osculatrice à la proposée en un point $x = x_0$. Il suffit pour l'obtenir d'écrire le développement

$$\begin{aligned} y = \varphi(y) &= \varphi[x_0 + (x - x_0)] \\ &= \varphi(x_0) + (x - x_0)\varphi'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\varphi^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

D'après la règle du n° 2, on doit avoir

$$\varphi_0(x_0) = f(x_0), \qquad \varphi^{(r)}(x_0) = f^{(r)}(x_0) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

On déduit de là

$$\varphi(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

ce qui fait connaître la parabole osculatrice cherchée.

4. Théorème. — *Une courbe plane* (C′) *dépendant de* $n+1$ *paramètres, si on l'assujettit à rencontrer une courbe donnée* (C) *en un point fixe* P, *et de plus en* n *autres points voisins de* P, *puis qu'on fasse tendre suivant une loi quelconque ces* n *points vers* P, *la courbe* (C′) *tend vers l'une des courbes de son espèce osculatrices en* P *à la courbe* (C).

Les courbes (C′) et (C) étant définies par les équations

$$F(x, y, a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0; \qquad x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t),$$

soit, conformément à la théorie générale,

$$\psi(t) = F(\varphi_1, \varphi_2, a_1, \ldots, a_{n+1}).$$

Soient $t, t+h_1, t+h_2, \ldots, t+h_n$ les $n+1$ valeurs du paramètre qui donnent le point P et les n points voisins. Les conditions qui expriment le passage de (C′) en ces $n+1$ points sont

$$(6) \qquad \psi(t)=0, \quad \psi(t+h_1)=0, \quad \ldots, \quad \psi(t+h_n)=0.$$

Nous allons faire tendre tous les h vers zéro *suivant une loi quelconque* et nous désignerons par ε la plus grande des valeurs absolues de ces n quantités dans chaque position des points variables. Le système (6) peut être remplacé par celui-ci

$$\psi(t)=0, \quad \psi(t+h_i)-\psi(t)=0, \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

ou, en vertu d'une proposition fondamentale, par cet autre

$$(7) \qquad \psi(t)=0, \quad \psi'(t+k_i)=0, \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

les quantités k_i étant toutes comprises entre $-\varepsilon$ et ε. En appliquant le même principe, nous remplacerons le système (7) par le suivant :

$$\psi(t)=0, \quad \psi'(t+k_1)=0, \quad \psi''(t+l_i)=0, \quad (i=1,2,\ldots,n-1),$$

où les l_i sont compris entre $-\varepsilon$ et ε. En continuant de même, nous arriverons facilement au système

$$\psi(t)=0, \quad \psi'(t+k_1)=0, \quad \psi''(t+l_2)=0, \quad \ldots \quad \psi^n(t+r_n)=0,$$

où tous les accroissements $k_1, l_2, \ldots, r_n$ sont compris entre $-\varepsilon$ et ε. Si maintenant nous passons à la limite, ε devenant nul, nous trouvons

$$\psi(t)=0, \quad \psi'(t)=0, \quad \psi''(t)=0, \quad \ldots, \quad \psi^{(n)}(t)=0,$$

c'est-à-dire précisément les conditions par lesquelles sont déterminés les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ quand les courbes (C′) et (C) ont un contact d'ordre n au point P.

Cette proposition, fondamentale dans la théorie des courbes osculatrices, permet de déterminer certaines d'entre elles sans calcul. La droite osculatrice, étant la limite d'une sécante, est la tangente. Le cercle osculateur pourra être considéré comme la limite d'un cercle tangent en P à la courbe donnée (C) et passant par un point P′ voisin de P. Son centre est donc sur la normale en P et sur la position limite de la perpendiculaire au milieu de

la corde PP′; il coïncide donc avec le centre de courbure. De même, on peut voir qu'il existe deux paraboles osculatrices; il suffit de prendre la corde P_2P_3 toujours parallèle à PP_1; ces deux cordes constituent une première parabole joignant les quatre points et dont la limite est la tangente en P; il y a de plus une véritable parabole passant par ces quatre points, et qui devient osculatrice quand les deux cordes viennent se confondre avec la tangente en P.

III. — Contact d'une courbe et d'une surface. — Plan osculateur.

5. Quand une courbe (C), plane ou gauche, et une surface (S) ont en commun un point simple P, on dit qu'elles ont en ce point un *contact d'ordre n*, si, à tout point Q infiniment voisin de P sur la courbe, on peut faire correspondre sur la surface un point Q′ tel que la distance QQ′ soit un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à la corde PQ.

Soient x, y, z les coordonnées de P; x_1, y_1, z_1 celles de Q; $x_1+\alpha$, $y_1+\beta$, $z_1+\gamma$ celles de Q′ et $F(x, y, z)=0$ l'équation de la surface. Si λ, μ, ν sont les angles des axes, on a

$$QQ' = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\cos\nu+2\beta\gamma\cos\lambda+2\gamma\alpha\cos\mu}.$$

En raisonnant comme pour les courbes planes, on reconnaît que $F(x_1, y_1, z_1)$ est un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à la corde PQ. Réciproquement, s'il en est ainsi, il y a contact d'ordre n, deux des trois quantités α, β, γ pouvant être prises arbitrairement de l'ordre $n+1$, ce qui détermine la troisième. Il n'y aurait exception que si les trois dérivées F'_x, F'_y, F'_z étaient nulles; mais alors P ne serait pas un point simple de la surface.

En conséquence, *pour qu'une courbe et une surface aient, en un point* P, *un contact d'ordre n, il faut et il suffit que les coordonnées d'un point* Q *infiniment voisin de* P *sur la courbe, étant substituées dans le premier membre de l'équation de la surface, donnent un résultat de l'ordre* $n+1$ *par rapport à la distance* PQ.

Si la courbe (C) est donnée par les formules

$$x=\varphi_1(t), \qquad y=\varphi_2(t), \qquad z=\varphi_3(t),$$

soient t et $t+dt$ les valeurs du paramètre auxquelles correspondent les points P et Q; le point P étant un point simple de (C), la corde PQ est de l'ordre de dt (Chap. I, n° 4). Si donc on pose

$$\psi(t) = F[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)],$$

le contact d'ordre n s'exprime par les $n+1$ conditions

$$(8) \qquad \psi(t) = 0, \quad \psi'(t) = 0, \quad \ldots, \quad \psi^{(n)}(t) = 0.$$

Quant la courbe (C) est donnée par deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

on peut prendre $x = t$. On calcule les dérivées des n premiers ordres de la fonction composée

$$\psi(t) = \psi(x) = F(x, y, z),$$

où y et z sont les fonctions implicites de x définies par les équations de la courbe, et l'on égale ces dérivées à zéro.

6. On appelle *surfaces osculatrices* en un point d'une courbe, parmi les surfaces d'une famille à $n+1$ paramètres, celles qui ont, en ce point, un contact d'ordre n avec la courbe.

Un plan, dépendant de trois paramètres, peut avoir un contact du second ordre. Le plan

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

aura un contact du premier ordre en x, y, z, si l'on a

$$(9) \qquad 0 = \psi(t) = Ax + By + Cz + D,$$

$$(10) \qquad 0 = \psi'(t) = Ax' + By' + Cz'.$$

Il n'est donc assujetti qu'à contenir la tangente à la courbe : c'est un *plan tangent*. Il aura un contact du second ordre et sera *osculateur* si l'on a de plus

$$(11) \qquad 0 = \psi''(t) = Ax'' + By'' + Cz''.$$

Nous retrouvons bien le plan déjà considéré sous le nom de *plan osculateur*, et défini comme étant mené par un point d'une courbe perpendiculairement à la droite polaire de ce point.

Étudions la position d'une courbe près d'un de ses points, par rapport à ses plans tangents et à son plan osculateur. Soit

$$G = A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

l'équation du plan tangent en $P(x, y, z)$ que nous considérons. Les coefficients A, B, C vérifient l'équation (10). Substituons dans G les coordonnées d'un point voisin de P,

$$x_1 = \varphi_1(t + h) = x + hx' + \frac{h^2}{2}(x'' + \alpha), \qquad y_1 = \ldots, \qquad z_1 = \ldots,$$

Eu égard à l'équation (10), nous trouvons

$$G(x_1, y_1, z_1) = \frac{h^2}{2}(Ax'' + By'' + Cz'' + A\alpha + B\beta + C\gamma) = \frac{h^2}{2}[\psi''(t) + \varepsilon].$$

Si le plan n'est pas osculateur, $\psi''(t)$ diffère de zéro et donne son signe à la parenthèse, pourvu que h ait une valeur suffisamment petite, positive ou négative. Ainsi, de part et d'autre de P, *la courbe est située d'un même côté d'un quelconque de ses plans tangents.*

Si le plan $G = 0$ est le plan osculateur, il faudra prendre un terme de plus dans les développements de x_1, y_1, z_1 et l'on trouvera, $\psi''(t)$ étant nul,

$$G(x_1, y_1, z_1) = \frac{h^3}{6}(Ax''' + By''' + Cz''' + \varepsilon).$$

Ce résultat de substitution changeant de signe avec h, *la courbe traverse son plan osculateur*, ainsi qu'il a déjà été vu (Chap. V, n° **14**). Il y a exception pour les points, appelés *stationnaires,* dont le paramètre t vérifie à la fois les équations (10) et (11) et celle-ci

$$Ax''' + By''' + Cz''' = 0,$$

qui, étant linéaires et homogènes en A, B, C, entraînent

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

Une courbe, dont tous les points sont des points stationnaires, est une courbe plane, puisque l'identité $\Delta = 0$ caractérise les courbes planes (Chap. IV, n° **6**).

IV. — Sphère osculatrice.

7. La sphère, dépendant de quatre paramètres, peut avoir un contact du troisième ordre avec une courbe en un point $P(x, y, z)$. Si l'on désigne les coordonnées de son centre par x_1, y_1, z_1, son rayon par ρ, et qu'on suppose x, y, z fonctions d'une variable t, on aura les quatre équations

$$(12)\quad \begin{cases} o = \psi(t) = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-\rho^2, & o \equiv \psi''(t), \\ o = \frac{1}{2}\psi'(t) = (x-x_1)x'+(y-y_1)y'+(z-z_1)z', & o = \psi'''(t). \end{cases}$$

Or, si l'on considère x_1, y_1, z_1 comme des coordonnées courantes, l'équation $\psi'(t) = o$ représente le plan normal en P, et les deux suivantes s'en déduisent par différentiation. Donc *le centre de la sphère osculatrice est au point où la droite polaire touche son enveloppe, et le lieu des centres des sphères osculatrices est l'arête de rebroussement de la surface polaire*. On voit qu'on peut poser d'après cela

$$(13)\quad x_1 = x + \alpha' R + \alpha'' l, \quad y_1 = y + \beta' R + \beta'' l, \quad z_1 = z + \gamma' R + \gamma'' l,$$

l étant la longueur qu'il faut porter à partir du centre de courbure sur la direction positive de la droite polaire pour obtenir le point (x_1, y_1, z_1). Nous la déterminerons en exprimant que la tangente au lieu du point (x_1, y_1, z_1) est perpendiculaire à la normale principale de (C), ce qui donne

$$\alpha' \frac{dx_1}{ds} + \beta' \frac{dy_1}{ds} + \gamma' \frac{dz_1}{ds} = o.$$

Si l'on différentie x_1, y_1, z_1 en tenant compte des formules fondamentales, il vient

$$(14)\quad \frac{dx_1}{ds} = \alpha'\left(\frac{l}{T} + \frac{dR}{ds}\right) + \alpha''\left(\frac{dl}{ds} - \frac{R}{T}\right)$$

et deux expressions analogues. En les substituant dans la relation précédente, on trouve

$$(15)\quad l = -T\frac{dR}{ds}.$$

Ainsi est déterminé le centre de la sphère osculatrice

$$(16) \qquad x_1 = x + \alpha' R - \alpha'' T \frac{dR}{ds}, \qquad y_1 = \ldots, \qquad z_1 = \ldots.$$

Son rayon ρ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont R et l sont les côtés. On a donc

$$(17) \qquad \rho^2 = R^2 + T^2 \frac{dR^2}{ds^2}.$$

La sphère osculatrice au point P, ayant son centre sur la droite polaire de P et passant en ce point, est coupée par le plan osculateur suivant le cercle osculateur. De plus, *la caractéristique de la sphère osculatrice est le cercle osculateur.* Pour l'établir, il suffit de prouver que cette caractéristique est située dans le plan osculateur. Or ses équations sont

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \rho^2 = 0,$$
$$(x - x_1)\frac{dx_1}{ds} + (y - y_1)\frac{dy_1}{ds} + (z - z_1)\frac{dz_1}{ds} + \rho\frac{d\rho}{ds} = 0.$$

Mais les formules (14) et (15) donnent

$$(18) \qquad \frac{1}{\alpha''}\frac{dx_1}{ds} = \frac{1}{\beta''}\frac{dy_1}{ds} = \frac{1}{\gamma''}\frac{dz_1}{ds} = -\frac{R}{T} - \frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right),$$

de sorte que l'équation du plan de la caractéristique peut s'écrire

$$-[\alpha''(x - x_1) + \beta''(y - y_1) + \gamma''(z - z_1)]\left[\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right)\right] + \rho\frac{d\rho}{ds} = 0.$$

Ce plan est parallèle au plan osculateur. Je dis qu'il passe en P. En effet, si x, y, z sont les coordonnées de ce point, les formules (16) donnent $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, et il vient

$$-T\frac{dR}{ds}\left[\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right)\right] + \rho\frac{d\rho}{ds} = 0,$$

ce qui est une identité, à cause de la formule (17).

8. Considérons une courbe gauche (C) et la courbe (C_1) lieu des centres M_1 des sphères osculatrices aux divers points M de (C). Le plan osculateur à (C) en M est perpendiculaire à la droite polaire KM_1 et, par suite, parallèle au plan normal de (C_1) en M_1.

Le plan osculateur à (C_1) en M_1, ayant pour caractéristique la droite polaire KM_1, se confond avec le plan normal à (C) en M. Ainsi l'angle de deux tangentes de (C_1) est égal à l'angle de deux plans osculateurs de (C); et l'angle de deux plans osculateurs de (C_1) est égal à l'angle de deux tangentes de (C); on a donc, au signe près,

$$\frac{ds_1}{R_1} = \frac{ds}{T}, \qquad \frac{ds_1}{T_1} = \frac{ds}{R}, \tag{19}$$

s_1, R_1, T_1 désignant respectivement l'arc, le rayon de courbure et le rayon de torsion de (C_1). Ces formules donnent

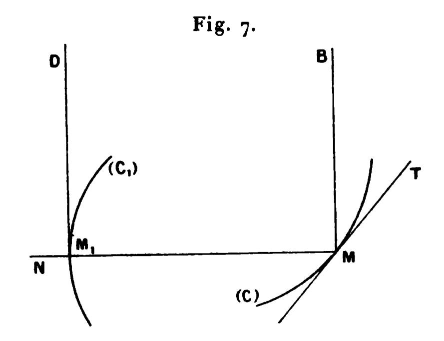
$$RR_1 = TT_1.$$

Elles font aussi connaître R_1 et T_1. Car, des relations (18) on tire, au signe près,

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dR}{ds}\right). \tag{20}$$

9. Nous pouvons maintenant généraliser une propriété de l'hélice circulaire (Chap. V, n° 5): *Toute courbe à courbure constante*

Fig. 7.



est le lieu des centres de courbure de la courbe lieu de ses centres de courbure. En effet, la courbe (C) ayant sa courbure constante, il résulte de la formule (15) qu'en chacun de ses points M son centre de courbure K se confond avec le centre M_1 de la sphère osculatrice. Je dis que le centre de courbure de (C_1), relatif au point M_1, est précisément le point M. En effet, le centre de courbure cherché est à l'intersection du plan osculateur en M_1 avec la droite polaire de ce point. Or le plan osculateur de (C_1) en M_1

est le plan normal DM_1M de la courbe (C). La droite polaire de M_1 est la caractéristique du plan normal de (C_1) en M_1, qui se confond ici avec le plan osculateur de (C) en M; donc la droite polaire de M_1 est la caractéristique du plan osculateur de (C) en M, c'est-à-dire la tangente MT, et le point où MT perce le plan DM_1M c'est le point M lui-même. Ainsi il y a réciprocité entre les deux courbes (C) et (C_1), chacune d'elles étant le lieu des centres de courbure de l'autre.

10. Problème. — *Étant donnée une courbe gauche* (C), *trouver toutes les courbes qui l'admettent comme lieu des centres de leurs sphères osculatrices.*

La question revient à trouver les courbes dont les plans normaux sont les plans osculateurs de la courbe (C_1). Cherchons donc dans chaque plan osculateur de (C_1) un point M, dont le lieu soit une courbe normale à ce plan. Tout point M du plan osculateur en $M_1(x_1, y_1, z_1)$ peut être rapporté à la tangente et à la normale principale prises comme axes mobiles; si u et v sont ses coordonnées relatives, ses coordonnées absolues seront

$$x = x_1 + \alpha_1 u + \alpha'_1 v, \qquad y = \ldots, \qquad z = \ldots,$$

les lettres affectées de l'indice 1 désignant les cosinus des directions principales de la courbe (C_1); soient de plus s_1, R_1, T_1 l'arc, le rayon de courbure et le rayon de torsion de (C_1). On aura, par différentiation,

$$\frac{dx}{ds_1} = \alpha_1\left(1 + \frac{du}{ds_1} - \frac{v}{R_1}\right) + \alpha'_1\left(\frac{u}{R_1} + \frac{dv}{ds_1}\right) - \frac{\alpha''_1 v}{T_1},$$

et deux relations analogues. Écrivant que la direction dx, dy, dz est perpendiculaire à la tangente $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et à la normale principale $(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1)$, nous trouvons

$$\frac{du}{ds_1} - \frac{v}{R_1} + 1 = 0, \qquad \frac{dv}{ds_1} + \frac{u}{R_1} = 0.$$

Après le changement de variable $d\sigma = ds_1 : R_1$, ces équations deviennent

$$(21) \qquad \frac{du}{d\sigma} - v + R_1 = 0, \qquad \frac{dv}{d\sigma} + u = 0.$$

On en déduit immédiatement, par élimination de u,

$$\frac{d^2 v}{d\sigma^2} + v = R_1,$$

équation dont l'intégrale générale est

$$v = a \sin\sigma + b \cos\sigma - \cos\sigma \int \sin\sigma \, ds + \sin\sigma \int \cos\sigma \, ds,$$

a et b étant deux constantes arbitraires; la seconde des équations (21) donne alors

$$u = a \cos\sigma - b \sin\sigma - \sin\sigma \int \sin\sigma \, ds + \cos\sigma \int \cos\sigma \, ds.$$

Dans chaque plan osculateur de (C_1) les points cherchés sont donc en nombre doublement infini, puisqu'ils dépendent de deux constantes arbitraires a, b. Ces constantes une fois choisies, le point correspondant M décrit, quand M_1 varie sur (C_1), une courbe trajectoire orthogonale du plan osculateur de M_1. On peut, en considérant a et b comme des fonctions d'un paramètre t, grouper dans chaque plan osculateur les points M de manière à en former une courbe (Γ). Les fonctions a et b étant choisies, les courbes (Γ), situées dans les divers plans osculateurs de (C_1), sont toutes égales entre elles; ce sont les diverses positions d'une même courbe. Le lieu des courbes (Γ) dans l'espace est une surface qui, le long de chacune d'elles, coupe à angle droit le plan de cette courbe. Nous reviendrons sur ces surfaces, à propos de la théorie des lignes de courbure, à la fin du Chapitre VIII.

V. — Courbes sphériques.

11. Ce qui précède permet de caractériser les *courbes sphériques*. Une courbe étant tracée sur la sphère que représente la première des équations (12) quand on y considère x_1, y_1, z_1 et ρ comme des constantes, tous les points de cette courbe vérifient cette équation et toutes celles qui s'en déduisent par différentiation, notamment les trois dernières équations (12). Donc la sphère osculatrice est la même en tous les points de la courbe; c'est la sphère qui porte cette courbe. De cette propriété, qu'on peut

considérer comme évidente, il résulte qu'on a, *en tous les points d'une courbe sphérique,*

$$R^2 + T^2 \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = \text{const.} \tag{22}$$

Réciproquement, si le rayon de la sphère osculatrice est le même en tous les points d'une courbe, cette courbe est sphérique, à moins qu'elle n'ait sa courbure constante. Reportons-nous, en effet, aux formules (14) et (15); appelons T', R', R'' les dérivées de T et de R par rapport à s; les formules (18) deviennent

$$\frac{1}{\alpha''}\frac{dx_1}{ds} = \frac{1}{\beta''}\frac{dy_1}{ds} = \frac{1}{\gamma''}\frac{dz_1}{ds} = -\frac{1}{T}(R + TT'R' + T^2R''). \tag{18'}$$

Mais, si l'on différentie l'équation (22), on trouve

$$R'(R + TT'R' + T^2R'') = 0.$$

Donc, si la courbure n'est pas constante, le dernier membre des équations (18)' est nul; la sphère osculatrice a son centre fixe, et son rayon, par hypothèse, est constant. Donc elle est la même en tous les points de la courbe considérée qui, par suite, est sphérique. Ainsi, *pourqu'une courbe à courbure variable soit sphérique, il faut et il suffit que le rayon de la sphère osculatrice soit constant,* ce qui s'exprime par l'équation (22). Mais, en vertu des formules (18), *c'est la relation*

$$\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right) = 0 \tag{23}$$

qui caractérise les courbes sphériques.

Pour compléter, nous allons prouver que *les courbes sphériques à courbure constante sont des cercles.* En effet, les coordonnées de tous les points d'une courbe sphérique rendent identique la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.}$$

Différentions-la deux fois par rapport à l'arc; nous aurons

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \qquad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + R = 0.$$

Comme R est supposé constant, si l'on différentie une fois de plus,

en ayant égard aux formules fondamentales, il viendra

$$\frac{\alpha''x + \beta''y + \gamma''z}{T} = 0.$$

On conclut de là que la torsion est nulle, et, par suite, la courbe plane; car, si l'on supposait T fini, le numérateur serait nul, et une nouvelle différentiation donnerait

$$\frac{\alpha'x + \beta'y + \gamma'z}{T} = -\frac{R}{T} = 0, \qquad \frac{1}{T} = 0,$$

contrairement à l'hypothèse. En conséquence, les courbes sphériques à courbure constante, étant planes, sont des cercles.

Remarque. — Voici une propriété générale, presque évidente, des courbes sphériques. Les rayons qui vont du centre d'une sphère aux divers points d'une courbe (C) tracée sur elle sont des normales de cette courbe, et ils forment un cône, surface développable. Donc, si l'on fait tourner chacun de ces rayons d'un angle constant autour de la tangente à (C) en son extrémité, il reste tangent à une développée de cette courbe (Ch. V, n° 10, 1°). Ainsi *l'on détermine sans quadrature toutes les développées d'une courbe sphérique quelconque.* En particulier, l'une de ces développées est l'enveloppe des normales menées à la courbe dans les plans tangents à la sphère sur laquelle elle est tracée.

VI. — Contact de deux courbes de l'espace.

12. Quand deux courbes de l'espace (C) et (C'), planes ou gauches, ont en commun un point simple P, on dit qu'elles ont en ce point un *contact d'ordre n*, si, à tout point Q, infiniment voisin de P sur la courbe (C), on peut faire correspondre sur la courbe (C') un point Q' tel que la distance QQ' soit un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à la corde PQ.

Appelons x, y, z les coordonnées de P; x_1, y_1, z_1 celles de Q; $x_1+\alpha$, $y_1+\beta$, $z_1+\gamma$ celles de Q' (*fig.* 8), la courbe (C') étant définie par deux équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0.$$

Exprimons que le point Q′ est sur cette courbe; nous aurons

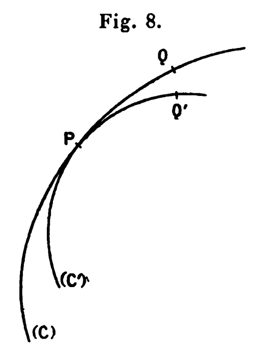
$$(24)\quad \begin{cases} 0 = F(x_1+\alpha, \ldots) = F(x_1, y_1, z_1) + \alpha F'_{x_1} + \beta F'_{y_1} + \gamma F'_{z_1} + \ldots, \\ 0 = G(x_1+\alpha, \ldots) = G(x_1, y_1, z_1) + \alpha G'_{x_1} + \beta G'_{y_1} + \gamma G'_{z_1} + \ldots. \end{cases}$$

On a, d'autre part, λ, μ, ν étant les angles des axes,

$$QQ' = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\cos\nu + 2\beta\gamma\cos\lambda + 2\gamma\alpha\cos\mu},$$

ce qui montre que l'une au moins des longueurs α, β, γ est de l'ordre $n+1$ par rapport à PQ, les autres pouvant être d'ordre supérieur. Par suite, *les deux expressions* $F(x_1, y_1, z_1)$ *et* $G(x_1, y_1, z_1)$ *sont d'ordre* $n+1$.

Fig. 8.



Réciproquement, s'il en est ainsi, choisissons arbitrairement pour α une expression de l'ordre $n+1$; les équations (24) donneront pour β et γ des expressions du même ordre; la distance QQ′ sera aussi de l'ordre $n+1$; les deux courbes auront *un contact d'ordre n*.

Le raisonnement précédent suppose que l'un au moins des trois déterminants

$$F'_{x_1}G'_{y_1} - F'_{y_1}G'_{x_1}, \qquad F'_{y_1}G'_{z_1} - F'_{z_1}G'_{y_1}, \qquad F'_{z_1}G'_{x_1} - F'_{x_1}G'_{z_1}$$

ne soit pas infiniment petit. Mais, s'il en était autrement, les trois déterminants

$$F'_xG'_y - F'_yG'_x, \qquad F'_yG'_z - F'_zG'_y, \qquad F'_zG'_x - F'_xG'_z,$$

qui diffèrent infiniment peu des précédents, ayant des valeurs

fixes, seraient rigoureusement nuls. On verra, en se reportant aux développements des Chapitres I et II, qu'on peut toujours, le point P étant supposé point simple de la courbe (C'), donner aux fonctions F et G des formes telles que cette circonstance ne se produise pas. Il suffit, pour employer le langage géométrique, de faire passer par (C') deux surfaces $F = 0$ et $G = 0$ pour lesquelles le point P soit un point simple et qui ne se touchent pas en ce point. Comme il en sera toujours ainsi dans les applications qui vont suivre, nous n'insisterons pas davantage, et nous conclurons :

Pour que deux courbes (C) *et* (C') *aient en* P *un contact d'ordre n, il faut et il suffit que les coordonnées d'un point* Q, *infiniment voisin de* P *sur* (C), *étant substituées dans les premiers membres des équations de la courbe* (C'), *donnent des résultats de l'ordre* $n+1$ *par rapport à la distance* PQ.

En raisonnant comme au n° 2, on verra que, si la courbe (C) est définie par les formules

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t),$$

l'infiniment petit PQ est de l'ordre de dt. Si donc on pose

$$\psi(t) = F[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)], \qquad \chi(t) = G[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)],$$

les développements de $\psi(t+h)$ et de $\chi(t+h)$ suivant les puissances de h devront commencer par les termes en h^{n+1}. En conséquence, on devra avoir

$$\begin{array}{llll} \psi(t) = 0, & \psi'(t) = 0, & \ldots, & \psi^{(n)}(t) = 0, \\ \chi(t) = 0, & \chi'(t) = 0, & \ldots, & \chi^{(n)}(t) = 0. \end{array}$$

Ainsi, *il faut* $2n+2$ *conditions pour exprimer que deux courbes de l'espace ont en un point donné un contact d'ordre n*, tandis qu'il n'en faut que $n+1$ pour deux courbes situées dans le même plan (n° 2).

Remarque. — Pour exprimer que les deux courbes (C) et (C') ont en un point *indéterminé* un contact d'ordre n, on éliminera t entre les $2n+2$ équations ci-dessus; de sorte qu'il ne restera plus que $2n+1$ équations de condition.

VII. — Droite osculatrice; cercle osculateur.

13. On définit les *courbes osculatrices* dans l'espace exactement de la même manière que dans le plan (n° 3). Mais il convient de signaler une différence entre les deux cas. Si un système de courbes (C′) de l'espace dépend de $2n+2$ paramètres, il y aura généralement un nombre limité de courbes du système qui auront en un point donné P un contact d'ordre n avec une courbe (C) donnée. Si les courbes (C′) dépendent de paramètres en nombre impair, $2n+1$ par exemple, on ne pourra établir qu'un contact d'ordre $n-1$ en un point donné (P) entre une courbe donnée (C) et certaines des courbes (C′); mais le contact d'ordre $n-1$ n'imposant que $2n$ conditions, ces courbes *osculatrices* (C′) seront en nombre infini, un paramètre restant arbitraire dans leurs équations.

Cette observation n'empêche pas d'étendre aux courbes de l'espace la propriété importante établie au n° 4. La démonstration étant la même, nous nous contenterons d'énoncer le résultat : *Une courbe de l'espace* (C′) *dépendant de* $2n+2$ *paramètres, si on l'assujettit à rencontrer une courbe donnée* (C) *en un point fixe* P *et, de plus, en n autres points voisins de* P, *puis qu'on fasse tendre ces n points vers* P, *la courbe* (C′) *tendra vers l'une des courbes de son espèce, osculatrices en* P *à la courbe* (C).

14. Les équations d'une droite contenant quatre paramètres, on pourra établir un contact du premier ordre entre une droite et une courbe (C) en l'un de ses points P. D'après le théorème que nous venons d'énoncer, la droite osculatrice en P est la position limite d'une sécante issue de P quand son second point d'intersection avec la courbe tend vers ce point. Ainsi, *la droite osculatrice n'est autre que la tangente.*

Les équations d'un cercle peuvent toujours être ainsi écrites

$$F = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 - \rho^2 = 0,$$
$$G = l(x-x_1) + m(y-y_1) + n(z-z_1) = 0.$$

Elles contiennent six indéterminées, savoir les coordonnées du

centre et le rayon d'une sphère, ainsi que les deux paramètres directeurs d'un plan passant par le centre de cette sphère. On pourra donc établir un contact du second ordre entre un cercle et une courbe donnée (C) en un point P. Si l'on conçoit que les coordonnées x, y, z des points de (C) soient remplacées dans F et G par leurs expressions en t, les fonctions F et G seront identiques à celles que nous appelions plus haut $\psi(t)$ et $\chi(t)$. A l'équation $\psi = 0$ nous devons associer les deux équations dérivées $\psi'(t) = 0$, $\psi''(t) = 0$. Mais on a

$$\tfrac{1}{2}\psi'(t) = (x - x_1)x' + (y - y_1)y' + (z - z_1)z',$$

ce qui montre que, si l'on considère les inconnues x_1, y_1, z_1 comme des coordonnées courantes, l'équation $\psi'(t) = 0$ définit le plan normal à (C) au point $P(x, y, z)$. En conséquence le système formé par cette équation et sa dérivée $\psi''(t) = 0$ représente la droite polaire de (C) relative au point P. Donc le centre du cercle osculateur est sur cette droite.

Écrivons maintenant les trois autres équations du problème :

$$\begin{aligned}
\chi(t) &= l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0,\\
\chi'(t) &= lx' + my' + nz' = 0,\\
\chi''(t) &= lx'' + my'' + nz'' = 0.
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement, en éliminant l, m et n,

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

A, B, C étant les coefficients de l'équation du plan osculateur. Ainsi le centre cherché (x_1, y_1, z_1) est dans le plan osculateur de (C) au point P. Comme il est aussi sur la droite polaire de ce point, il se confond avec le centre de courbure. On voit que le cercle osculateur est situé dans le plan osculateur et qu'il a même centre que le cercle de courbure. En conséquence, *le cercle osculateur d'une courbe quelconque, plane ou gauche, se confond avec son cercle de courbure.*

CHAPITRE VII.

COURBURE DES LIGNES TRACÉES SUR LES SURFACES.

I. — Théorème de Meusnier.

1. Proposons-nous d'étudier la courbure des courbes tracées sur une surface et passant par l'un de ses points $M(x, y, z)$. Considérons l'une de ces courbes (C). Son centre de courbure K est à l'intersection de sa droite polaire avec son plan osculateur. Écrivons les équations de la droite polaire (D) :

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0, \tag{1}$$

$$(X - x)\,d^2x + (Y - y)\,d^2y + (Z - z)\,d^2z = ds^2; \tag{2}$$

les différentielles sont prises par rapport à la variable dont dépendent les coordonnées x, y, z et l'arc s de la courbe (C). Cherchons le point N où la droite (D) rencontre la normale MN à la surface. Soient a, b, c les cosinus de la direction choisie comme direction positive sur cette normale, et R la longueur du segment qui va de M en N, comptée positivement dans la direction (a, b, c), négativement en sens contraire. Si X, Y, Z sont les coordonnées de N, nous aurons

$$X - x = a\mathrm{R}, \qquad Y - y = b\mathrm{R}, \qquad Z - z = c\mathrm{R}. \tag{3}$$

Substituons ces expressions dans les équations de la droite polaire; la première deviendra

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0, \tag{4}$$

identité qui est vérifiée pour toute direction (dx, dy, dz) du

plan tangent; la seconde donne la longueur cherchée

$$(5) \qquad R = \frac{ds^2}{a d^2x + b d^2y + c d^2z}.$$

Si l'on différentie l'identité (4), on trouve

$$a\,d^2x + b\,d^2y + c d^2z = -(da\,dx + db\,dy + dc\,dz),$$

ce qui permet d'écrire

$$(6) \qquad R = -\frac{ds^2}{da\,dx + db\,dy + dc\,dz}.$$

Comme les cosinus a, b, c sont des fonctions de deux des coordonnées, x et y par exemple, on aura

$$\frac{1}{R} = -\left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)\frac{dx}{ds} + \ldots.$$

On voit que la longueur R est la même pour toutes les courbes de la surface qui ont en M la même tangente MT; elle correspond, en particulier, à la section faite dans la surface par le plan qui contient la normale MN et la tangente commune MT (*section normale*). Donc *les droites polaires de toutes les courbes tracées sur une surface par un de ses points* M, *et tangentes en ce point à la même droite* MT, *concourent en un même point* N, *qui est le centre de courbure de la section normale passant par la tangente* MT.

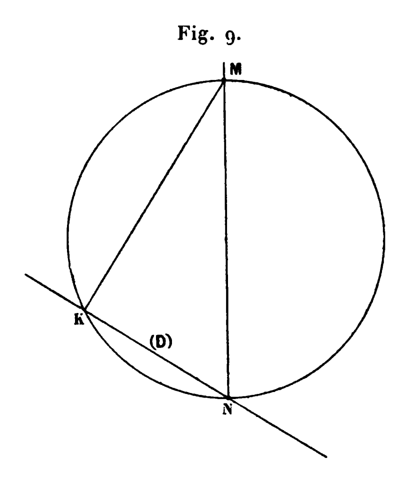
Prenons pour plan de la figure le plan mené par M perpendiculairement à MT; et soit MK (*fig.* 9) la trace du plan osculateur à la courbe (C). La droite polaire (D) est perpendiculaire à MK et passe en N; donc le centre de courbure K est la projection de N sur le plan osculateur. D'où cet autre énoncé :

Théorème. — *Une courbe quelconque* (C) *étant tracée par un point* M *d'une surface, son centre de courbure relatif au point* M *est le point de son plan osculateur en* M *où se projette le centre de courbure de la section normale qui a même tangente en* M *que la courbe* (C).

En particulier, *le centre de courbure d'une courbe quelconque, tracée par un point* M *d'une surface, coïncide avec celui de la section faite dans la surface par son plan oscula-*

teur en M, ce qui restreint l'étude aux sections planes. On voit aussi que *le centre de courbure d'une section oblique d'une surface est la projection de celui de la section normale qui a même tangente :* c'est là le théorème de Meusnier.

Fig. 9.



Il revient à dire que *les centres de courbure* K *des sections faites dans une surface par un plan qui tourne autour d'une tangente fixe* MT *sont situés sur un cercle dont le plan est perpendiculaire à la tangente* MT *en son point de contact* M, *et qui a pour diamètre le rayon de courbure* MN *de la section normale déterminée par* MT.

Remarque. — Le procédé que nous avons employé pour déterminer le centre de courbure K tombe visiblement en défaut quand la courbe (C) admet pour plan osculateur en M le plan tangent à la surface; car alors la droite polaire (D) et la normale MN sont parallèles. Nous retrouverons plus loin ces courbes sous le nom de *lignes asymptotiques*.

II. — Courbure des sections normales; indicatrice.

2. D'après le théorème précédent, il suffit d'étudier le rayon de courbure des diverses sections normales d'une surface autour d'un de ses points. A cet effet, on rapporte la surface à sa nor-

male MN prise pour axe des z, et à deux droites rectangulaires Mx, My de son plan tangent. Si l'on fait coïncider la direction positive de la normale avec celle de l'axe Mz, les cosinus a, b, c ont respectivement pour valeurs o, o, 1 ; et le z du centre de courbure d'une section normale se déduit des formules (3) et (5), qui donnent ici

$$Z = R = \frac{ds^2}{d^2 z}.$$

Or, le plan tangent étant pris pour plan des xy, les dérivées premières de z sont nulles à l'origine, et l'expression générale de $d^2 z$ se réduit à

$$r_0 dx^2 + 2 s_0 \, dx \, dy + t_0 dy^2.$$

Le rayon de courbure R de la section normale qui contient la direction (dx, dy) est donc déterminé en grandeur et signe par la formule

$$\frac{1}{R} = r_0 \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2 s_0 \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + t_0 \left(\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

qu'on peut encore écrire

$$(7) \qquad \frac{1}{R} = r_0 \cos^2 \omega + 2 s_0 \cos \omega \sin \omega + t_0 \sin^2 \omega,$$

en représentant par ω l'angle que fait avec l'axe Mx la trace du plan normal considéré sur le plan $z = 0$.

Le centre de courbure est situé, par rapport au plan tangent, du côté des z positifs, ou du côté opposé, suivant que les valeurs attribuées à ω rendent R positif ou négatif. Il y a donc lieu de distinguer trois cas.

1° Soit $s_0^2 - r_0 t_0 < 0$. Quel que soit l'angle ω, le trinôme (7) a un signe constant. Toutes les sections normales ont leurs centres de courbure situés d'un même côté du plan tangent. Par suite, aux environs de l'origine, tous les points de la surface sont d'un même côté de ce plan. On dit alors que la surface est *convexe* autour de l'origine. Si l'on a choisi pour direction positive de Oz la demi-droite située du même côté du plan tangent que la surface, R est toujours positif. On peut poser $R = \rho^2$ et l'on a

$$(8) \qquad \rho^2 (r_0 \cos^2 \omega + 2 s_0 \cos \omega \sin \omega + t_0 \sin^2 \omega) = 1 ;$$

on voit que ρ est le rayon vecteur de l'ellipse

$$(9) \qquad r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2 = 1,$$

appelée *indicatrice* de la surface au point M. Ainsi *le rayon de courbure* R *d'une section normale est égal au carré du rayon vecteur de l'indicatrice, qui est dirigé suivant la trace de cette section normale.*

Il présente donc deux valeurs maxima et deux valeurs minima qui correspondent aux directions principales de l'indicatrice.

2° Soit $s_0^2 - r_0 t_0 > 0$. Le signe du trinôme (7) dépend des valeurs de ω. Les sections normales ont donc leurs centres de courbure situés de part et d'autre du plan tangent. Par conséquent la surface présente, aux environs de l'origine, des régions situées les unes d'un côté du plan tangent, les autres de l'autre. On dit qu'elle est *à courbures opposées* autour de l'origine. Si l'on pose encore $R = \rho^2$, l'équation (7) donne, comme plus haut, les équations (8) et (9); mais ces équations représentent ici une hyperbole ayant pour asymptotes les droites

$$r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2 = 0.$$

Dans l'angle des asymptotes où est l'hyperbole *indicatrice* (9), tous les diamètres sont transverses; donc ρ^2 et R sont positifs : la surface est située, par rapport au plan tangent, du côté des z positifs. Dans l'autre angle des asymptotes, les diamètres sont des diamètres non transverses; ρ^2 et R sont négatifs : la surface est située du côté des z négatifs.

Pour les sections normales qui contiennent les asymptotes de l'indicatrice, R est infini. Ces deux sections présentent en M une inflexion; elles traversent, en ce point, le plan tangent. La valeur algébrique de R admet encore deux maxima et deux minima, qui correspondent aux axes de l'indicatrice.

3° Soit enfin $s_0^2 - r_0 t_0 = 0$. Le trinôme (7) est un carré parfait; par suite, R conserve toujours le même signe. Aux environs de l'origine, tous les points de la surface sont d'un même côté du plan tangent, qu'on peut prendre pour côté des z positifs. Si l'on pose $R = \rho^2$, on retrouve les équations (8) et (9). Ces équations représentent ici une conique du genre parabole; mais cette

conique, ayant un centre, se décompose en deux droites parallèles

$$(r_0 x + s_0 y)^2 = r_0. \tag{10}$$

On donne encore au système de ces deux droites le nom d'*indicatrice* et l'on dit que le point M est un *point parabolique*. Le rayon de courbure R des sections normales passant en M varie entre l'infini, qui correspond à la direction $r_0 x + s_0 y = 0$, et un minimum qui correspond à la direction perpendiculaire.

En résumé, nous reconnaissons que, dans tous les cas, *le rayon de courbure d'une section normale est égal au carré de celui des rayons vecteurs de l'indicatrice qui est dirigé suivant la trace de cette section normale.*

3. Si, dans le plan des xy, on prend pour axes de coordonnées les axes de l'indicatrice, l'équation de cette conique ne contient plus de terme en xy et le rayon de la section normale d'azimut ω est donné par la formule

$$\frac{1}{R} = r_0 \cos^2\omega + t_0 \sin^2\omega. \tag{7'}$$

Appelons R_1 et R_2 les rayons de courbure des sections $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$, qui passent par les axes de l'indicatrice ; nous trouvons

$$\frac{1}{R_1} = r_0, \qquad \frac{1}{R_2} = t_0;$$

l'équation (7)' prend donc la forme

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}. \tag{11}$$

C'est la formule d'Euler. On en déduit que *les rayons de courbure* R *et* R' *de deux sections normales rectangulaires satisfont à la relation*

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const.},$$

qui exprime la propriété bien connue des longueurs de deux diamètres rectangulaires d'une conique. Tout ce qui précède subsiste pour les points paraboliques. Seulement l'un des rayons de courbure principaux est infini. Il suffira, dans les formules, de supprimer les termes où R_2 figure en dénominateur.

4. Nous allons voir que l'indicatrice représente non seulement la courbure des sections normales d'une surface en un point, mais aussi la forme même de la surface aux environs de ce point. Transportons, en effet, l'origine des coordonnées au point considéré, et prenons pour axe des z la normale, pour plan des xy le plan tangent. Le point M étant supposé un point simple, si l'on considère z comme une fonction de x et y, ses dérivées de tous les ordres auront à l'origine des valeurs bien déterminées; celles du premier ordre seront nulles; soient r_0, s_0, t_0 celles du second. La formule de Maclaurin donnera

$$z = \frac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2) + \Sigma,$$

Σ désignant des termes d'ordre au moins égal à trois par rapport à x et à y. Si l'on néglige ces termes, on substitue à la surface une quadrique qui en diffère fort peu dans le voisinage de l'origine. Cette quadrique est un paraboloïde elliptique, un paraboloïde hyperbolique ou un cylindre parabolique, suivant que l'expression $s_0^2 - r_0 t_0$ est négative, positive ou nulle.

Coupons la quadrique par des plans parallèles au plan tangent. La section par ce plan lui-même se compose de deux droites

$$r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2 = 0,$$

qui seront imaginaires, réelles ou confondues suivant les trois cas précités. La section faite par un plan $z = h \neq 0$ sera une conique homothétique de l'une des deux coniques

$$r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2 = \pm 1;$$

le signe *plus* correspond aux sections $z = h > 0$, le signe *moins* aux sections $z = h < 0$. L'une de ces deux coniques est l'*indicatrice;* l'autre est imaginaire quand $s_0^2 - r_0 t_0$ est négatif ou nul, et coïncide avec l'hyperbole conjuguée de l'indicatrice quand $s_0^2 - r_0 t_0$ est positif. Ainsi l'indicatrice suffit dans tous les cas à faire connaître la forme des sections de la surface par des plans voisins d'un plan tangent et parallèles à ce plan.

5. *Remarque.* — La théorie de la courbure des lignes tracées sur une surface suppose que le point considéré est un point *simple,* de sorte qu'en ce point toutes les dérivées de z, en parti-

culier celles du premier et du second ordre, ont des valeurs parfaitement déterminées. Il peut n'en être pas ainsi en certains points d'une surface. Considérons, par exemple, l'équation

$$2z = (x^2 + y^2)\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

où φ désigne une fonction du rapport $u = y : x$. On en déduit

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x\varphi(u) - \frac{y(1+u^2)\varphi'(u)}{2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = y\varphi(u) + \frac{x(1+u^2)\varphi'(u)}{2}.$$

Ces dérivées sont nulles au point $x = y = 0$, si la fonction $\varphi(u)$ et sa dérivée $\varphi'(u)$ ne deviennent infinies pour aucune valeur réelle de u. Mais, en calculant les dérivées secondes de z, on voit aisément qu'elles se présentent à l'origine sous une forme indéterminée, parce que leurs valeurs dépendent du rapport u, qui reste arbitraire. L'origine n'est donc pas un point simple et la théorie générale ne s'applique plus. Néanmoins, l'axe des z est normal à l'origine à toutes les sections faites dans la surface par les plans qui le contiennent. En effet, la section $y = ux$ est une parabole, représentée dans son plan par l'équation $\rho^2\varphi(u) = 2z$, et dont l'axe coïncide avec l'axe des z. Cela posé, il est facile de trouver le rayon de courbure R de chaque section normale $y = ux$, étant donnée la valeur de u; car cette parabole a pour paramètre l'inverse de $\varphi(u)$. C'est aussi le rayon de courbure en son sommet, en vertu d'une propriété de la parabole (Ch. IV, n° 9); on a donc

$$R = \frac{1}{\varphi(u)},$$

d'où il résulte que, quand le plan sécant tourne autour de la normale, le rayon R peut, suivant la forme de la fonction φ, devenir plusieurs fois infini et passer par des maxima et minima en nombre quelconque. C'est ce qui arrivera, par exemple, pour la surface représentée par l'équation

$$2z = (x^2 + y^2)\sin m\omega, \qquad \left(\omega = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}\right),$$

la courbure de la section normale d'azimut ω étant égale à $\sin m\omega$.

III. — Sections principales et rayons de courbure principaux.

6. On appelle *directions principales* d'une surface en un point les directions des axes de l'indicatrice; *sections principales* les sections normales qui passent par ces axes; *rayons de courbure principaux* les rayons de courbure des sections principales.

Avant de déterminer les directions principales et les rayons de courbure principaux en un point d'une surface, donnée par son équation, nous chercherons le rayon de courbure d'une section normale quelconque. A cet effet, partons de la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{a\, d^2 x + b\, d^2 y + c\, d^2 z}{d\sigma^2},$$

où x, y, z sont les coordonnées du point M que l'on considère; a, b, c les cosinus directeurs de la normale à la surface en ce point; σ et R l'arc et le rayon de courbure d'une section normale; $d^2 x$, $d^2 y$, $d^2 z$ les différentielles des coordonnées de cette section. Choisissons comme direction positive de la normale celle qui fait un angle aigu avec la direction positive de l'axe des z; nous aurons

$$\frac{a}{-p} = \frac{b}{-q} = \frac{c}{1} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

le radical étant pris en valeur absolue. Par suite

$$a\, d^2 x + b\, d^2 y + c\, d^2 z = \frac{d^2 z - p\, d^2 x - q^2\, dy}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Mais comme on a, pour toute courbe tracée sur la surface,

$$dz - p\, dx - q\, dy = 0,$$

il vient, après différentiation,

$$d^2 z - p\, d^2 x - q\, d^2 y = r\, dx^2 + 2s\, dx\, dy + t\, dy^2.$$

Finalement nous trouvons, pour la courbure cherchée,

$$(12) \qquad \frac{1}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

en désignant par α et β les cosinus directeurs $dx : d\sigma$ et $dy : d\sigma$ de la tangente à la section.

Remarque. — En vertu de la relation $Z - z = cR$, l'une des formules (3) de ce Chapitre, l'expression

$$\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{1}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}$$

sera la valeur algébrique de la différence $Z - z$ entre le z du centre de courbure N de la section normale et celui du point M.

7. D'après la formule (12), *les directions principales* sont celles dont les cosinus α, β, γ rendent maximum ou minimum le trinôme $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ et, par suite, satisfont à l'équation

$$(13) \qquad (r\alpha + s\beta)\,d\alpha + (s\alpha + t\beta)\,d\beta = 0,$$

qui résulte de la différentiation de ce trinôme. Or on a toujours

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

et, de plus, pour les droites tangentes à la surface,

$$(14) \qquad \gamma = \frac{dz}{d\sigma} = p\frac{dx}{d\sigma} + q\frac{dy}{d\sigma} = p\alpha + q\beta.$$

Nous pouvons donc écrire

$$(15) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + (p\alpha + q\beta)^2 = 1,$$

d'où résulte par différentiation

$$(16) \qquad [(1+p^2)\alpha + pq\beta]\,d\alpha + [pq\alpha + (1+q^2)\beta]\,d\beta = 0.$$

L'élimination de $d\alpha$ et de $d\beta$ entre les équations (13) et (16) fournit la condition cherchée

$$(17) \qquad \frac{(1+p^2)\alpha + pq\beta}{r\alpha + s\beta} = \frac{pq\alpha + (1+q^2)\beta}{s\alpha + t\beta},$$

qu'on peut aussi écrire

$$(17') \qquad \left\{ \begin{array}{l} [pqr - (1+p^2)s]\alpha^2 \\ \quad + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\alpha\beta + [(1+q^2)s - pqt]\beta^2 = 0. \end{array} \right.$$

Les équations (15) et (17) font connaître α et β ; on a ensuite γ par la formule (14). Ainsi se trouvent déterminées *les directions principales* en un point M.

8. Cherchons maintenant *les longueurs des rayons de courbure principaux*. Les rapports (17) sont visiblement égaux à

$$\frac{\alpha[(1+p^2)\alpha+pq\beta]+\beta[pq\alpha+(1+q^2)\beta]}{\alpha(r\alpha+s\beta)+\beta(s\alpha+t\beta)}=\frac{\alpha^2+\beta^2+(p\alpha+q\beta)^2}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2},$$

ce qui, en vertu des équations (12) et (14), n'est autre chose que $R:\sqrt{1+p^2+q^2}$. Si donc on désigne désormais par R l'un des rayons de courbure principaux, on aura le système

$$(18)\quad \begin{cases} \sqrt{1+p^2+q^2}[\alpha(1+q^2)+pq\beta]-R(r\alpha+s\beta)=0,\\ \sqrt{1+p^2+q^2}[\beta(1+q^2)+pq\alpha]-R(s\alpha+t\beta)=0; \end{cases}$$

d'où l'on déduit en éliminant R l'équation (17), et en éliminant α et β l'équation cherchée

$$(19)\quad \begin{vmatrix} (1+p^2)\sqrt{1+p^2+q^2}-Rr & pq\sqrt{1+p^2+q^2}-Rs \\ pq\sqrt{1+p^2+q^2}-Rs & (1+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}-Rt \end{vmatrix}=0.$$

Telle est *l'équation aux rayons de courbure principaux*. On voit immédiatement qu'elle a toujours ses racines réelles; car pour $R=0$ son premier membre acquiert la valeur essentiellement positive $(1+p^2+q^2)^2$, tandis qu'il se réduit à un carré précédé du signe *moins* quand le rapport $R:\sqrt{1+p^2+q^2}$ reçoit l'une des deux valeurs $(1+p^2):r$ et $(1+q^2):t$.

L'équation (19), ordonnée, devient

$$R^2(rt-s^2)-R\sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t] \\ +(1+p^2+q^2)^2=0.$$

La somme et le produit des inverses de ses racines ont reçu respectivement les noms de *courbure moyenne* et de *courbure totale* de la surface. Les développables ont leur courbure totale partout nulle (Ch. III, n° 19). On appelle *surfaces minima* les surfaces dont la courbure moyenne est nulle en chaque point, ou dont l'indicatrice est partout une hyperbole équilatère.

9. Nous allons déterminer directement les sections et les courbures principales des surfaces de révolution. Soient M un point et MN la normale à la surface, qui est contenue dans le méridien de M. Tout méridien étant un plan de symétrie de la surface,

deux plans menés par MN et également inclinés sur le méridien déterminent deux sections normales qui ont même rayon de courbure en M; ces rayons de courbure étant mesurés par les carrés des rayons vecteurs de l'indicatrice situés dans les deux plans sécants, on voit que ces rayons vecteurs sont égaux. Or, ils sont également inclinés sur la tangente MT au méridien. Donc MT est l'un des axes de l'indicatrice et la méridienne est l'une des sections principales. Par suite l'autre section principale est la section normale perpendiculaire au méridien. Pour trouver son centre de courbure, remarquons que cette section est tangente au parallèle du point M; d'après le théorème de Meusnier, le centre du parallèle est la projection du centre de courbure cherché; celui-ci est donc sur l'axe de révolution. D'où cette conclusion :

Théorème. — *En un point d'une surface de révolution l'une des sections principales est la méridienne; l'autre est la section normale perpendiculaire au méridien et a pour centre de courbure le point de l'axe de révolution situé sur la normale à la surface au point considéré.*

Ainsi les rayons de courbure principaux d'une surface de révolution en un point M sont : l'un le rayon de courbure de la méridienne en ce point, l'autre la normale à la méridienne, limitée à l'axe de révolution. Par suite, la recherche des surfaces de révolution dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation donnée $f(R_1, R_2) = 0$ revient à celle des courbes planes dont le rayon de courbure R et la normale N sont liés par la relation $f(R, N) = 0$. En particulier, si $R_1 = R_2$, le centre de courbure coïncide avec l'extrémité de la normale : la méridienne est une circonférence. Si $R_1 = -R_2$, l'extrémité de la normale et le centre de courbure sont symétriques par rapport à chaque point de la courbe cherchée : la méridienne est une chaînette ayant pour base l'axe de révolution (Ch. IV, n° 10, 2°). Donc *la seule surface de révolution dont les rayons de courbure principaux soient égaux et de signes contraires est engendrée par une chaînette tournant autour de sa base*. Cette surface a reçu le nom d'*alysséide*. On voit que *l'alysséide est la seule surface minima qui soit de révolution.*

IV. — Ombilics ; surfaces dont tous les points sont des ombilics.

10. On appelle *ombilics* les points d'une surface où l'indicatrice est un cercle. En un pareil point toutes les sections normales ont même rayon de courbure et, les axes de symétrie de l'indicatrice étant indéterminés, toutes les directions parallèles au plan tangent sont des directions principales. Les ombilics sont donc caractérisés par ce fait que l'équation (17) se réduit à une identité; d'où les deux conditions

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}. \tag{20}$$

Les deux équations (20), rapprochées de celle de la surface, déterminent en général un nombre *limité* de points. Néanmoins certaines surfaces présentent des *lignes d'ombilics,* ou même admettent tous leurs points pour ombilics.

Théorème. — *Les seules surfaces réelles dont tous les points soient des ombilics sont des sphères.*

Les équations (20) peuvent, en effet, s'écrire ainsi

$$\frac{pr}{1+p^2} = \frac{s}{q}, \qquad \frac{qt}{1+q^2} = \frac{s}{p}.$$

Les deux membres de chacune de ces équations étant des dérivées logarithmiques, en les intégrant on aura

$$1+p^2 = q^2 Y, \qquad 1+q^2 = p^2 X.$$

Les fonctions X et Y introduites par l'intégration ne dépendent l'une que de x, l'autre que de y. On a ainsi p^2 et q^2 :

$$p^2 = \frac{Y+1}{XY-1}, \qquad q^2 = \frac{X+1}{XY-1}.$$

Ces expressions ne sont indéterminées que si $X = Y = -1$, auquel cas p et q ne sont liées que par la seule relation

$$1+p^2+q^2 = 0, \tag{21}$$

qui n'admet pas de solution réelle. Les surfaces correspondantes,

nécessairement imaginaires, sont des développables, puisque q est fonction de p (Ch. III, n° 19). Elles sont circonscrites au cercle de l'infini. On reconnaît sans peine qu'elles répondent à la question, l'équation (21) entraînant les équations (20). Cette solution écartée, nous avons

$$p = \frac{\sqrt{Y+1}}{\sqrt{XY-1}}, \qquad q = \frac{\sqrt{X+1}}{\sqrt{XY-1}}.$$

Identifiant les deux expressions de s tirées de ces formules, nous trouvons

$$X'(X+1)^{-\frac{3}{2}} = Y'(Y+1)^{-\frac{3}{2}} = \text{const.} = -\frac{2}{R};$$

car les deux membres, ne dépendant, l'un que de x, l'autre que de y, ne peuvent être égaux que s'ils se réduisent à une constante. Séparons les deux équations et intégrons-les. En désignant par a et b deux constantes arbitraires, nous aurons successivement

$$(X+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x-a}{R}, \qquad (Y+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{y-b}{R},$$

$$X+1 = \frac{R^2}{(x-a)^2}, \qquad Y+1 = \frac{R^2}{(y-b)^2};$$

$$XY-1 = \frac{R^2}{(x-a)^2(y-b)^2}[R^2-(x-a)^2-(y-b)^2].$$

Les valeurs de p et de q deviennent par suite

$$p = \frac{x-a}{\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}}, \qquad q = \frac{y-b}{\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}};$$

elles donnent visiblement

$$dz = p\,dx + q\,dy = -d\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}.$$

L'intégration introduit une nouvelle constante arbitraire c,

$$z - c = -\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}.$$

On ne trouve ainsi que des sphères, et il est évident que toute sphère répond à la question.

CHAPITRE VIII.

DIRECTIONS CONJUGUÉES. — LIGNES ASYMPTOTIQUES. LIGNES DE COURBURE.

I. — Tangentes conjuguées et réseaux conjugués.

1. *Définitions.* — Deux droites, tangentes à une surface en un même point, sont dites *tangentes conjuguées,* si elles coïncident avec deux diamètres conjugués de l'indicatrice en ce point. Leurs directions sont dites *conjuguées.*

Il suit de là que, *parmi toutes les tangentes conjuguées en un point d'une surface, les seules qui soient rectangulaires sont les tangentes aux sections principales.*

Si deux familles de courbes tracées sur une surface sont telles que, par chaque point de la surface, passe une courbe de chaque famille, et que les tangentes à ces deux courbes soient des tangentes conjuguées, on dit que ces familles forment un *réseau conjugué.* Ainsi, sur toute surface de révolution, les parallèles et les méridiens forment un réseau conjugué.

Théorème. — *Si l'on mène les plans tangents à une surface le long d'une courbe* (C), *la tangente en tout point* M *de cette courbe* (C) *et la caractéristique du plan tangent en ce même point sont deux tangentes conjuguées.*

Pour démontrer cette propriété fondamentale, due à Dupin, considérons le plan tangent à une surface, mené le long d'une courbe (C). La caractéristique de ce plan est représentée par l'équation

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = 0,$$

jointe à celle qu'on obtient en la différentiant

$$-dz + p\,dx + q\,dy - (X - x)\,dp - (Y - y)\,dq = 0,$$

et qui se réduit visiblement à

$$(X - x)(r\,dx + s\,dy) + (Y - y)(s\,dx + t\,dy) = 0.$$

Dans cette dernière équation, dx et dy sont proportionnelles à deux des coefficients directeurs de la tangente à la courbe (C).

Supposons maintenant que la surface passe à l'origine des coordonnées, ainsi que la courbe (C), et qu'on ait pris pour plan des xy le plan tangent à la surface en M. Pour ce point M, x, y, z étant nuls, les équations de la caractéristique du plan tangent deviennent

$$Z = 0, \qquad X(r\,dx + s\,dy) + Y(s\,dx + t\,dy) = 0.$$

Le coefficient angulaire m' de cette caractéristique a donc pour valeur

$$m' = -\frac{r\,dx + s\,dy}{s\,dx + t\,dy}.$$

Celui de la tangente à l'origine à la courbe (C) étant $m = dy : dx$, on voit qu'on a

$$m' = -\frac{r + ms}{s + mt};$$

ceci n'est autre chose que la relation connue

$$tmm' + s(m + m') + r = 0,$$

qui lie les coefficients angulaires m et m' de deux diamètres conjugués de l'indicatrice

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = \pm 1.$$

Le théorème est donc démontré. Si l'on observe que les plans tangents menés le long de (C) enveloppent une surface développable, qui est circonscrite à la proposée, on a ce second énoncé :

Une développable étant circonscrite à une surface, la tangente en un point quelconque de la courbe de contact et la génératrice de la développable qui passe en ce point sont deux tangentes conjuguées.

2. De là résulte une propriété caractéristique des réseaux conjugués, que voici :

Théorème. — *Pour que deux familles de courbes, tracées sur une surface, forment un réseau conjugué, il faut et il suffit que les tangentes, menées à toutes les courbes d'une famille en leurs points d'intersection avec une courbe quelconque de l'autre famille, engendrent une développable.*

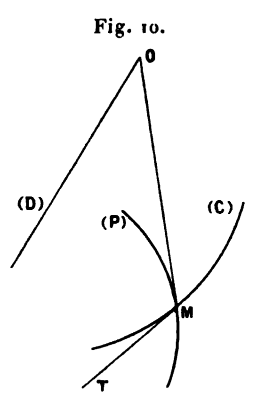
En effet, les plans tangents, menés à la surface le long de cette dernière courbe (C), enveloppent une développable dont la génératrice en chaque point est, d'après ce qui précède, conjuguée de la tangente à (C) en ce point : elle coïncide donc avec la tangente à la courbe (C′) de l'autre famille qui passe en ce point. Donc le lieu de ces tangentes est une développable. Réciproquement, supposons que la tangente, menée aux courbes (C′) d'une famille en leurs points d'intersection avec l'une quelconque (C) des courbes de l'autre famille, engendre une développable; elle est la caractéristique du plan tangent à cette développable, nécessairement circonscrite à la surface le long de (C) et, par suite, elle est aussi la caractéristique du plan tangent à la surface, mené le long de (C). En vertu du théorème fondamental, elle est conjuguée de la tangente à une courbe (C′), ce qui prouve que le réseau considéré est conjugué.

3. Une application immédiate du théorème précédent permet de déterminer géométriquement, sur une surface *quelconque*, une infinité de réseaux conjugués. Considérons, en effet, une droite quelconque (D), et coupons la surface par tous les plans qui contiennent cette droite; à ces sections planes, associons les courbes de contact des cônes circonscrits à la surface et ayant leurs sommets sur la droite (D). Les tangentes, menées aux diverses sections planes en leurs points d'intersection avec la courbe de contact d'un des cônes circonscrits, forment une développable, qui est ce cône lui-même. Donc *les sections faites dans une surface quelconque par les plans qui contiennent une droite fixe et les courbes de contact des cônes circonscrits qui ont leurs sommets sur cette droite forment un réseau conjugué.* Cette remarque, qui généralise la propriété des méridiens et des

parallèles de former sur toute surface de révolution un réseau conjugué, est due à M. Kœnigs.

On peut la tirer directement du théorème de Dupin. En effet, tout point M de la surface (*fig.* 10) détermine avec la droite (D) un plan qui coupe la surface suivant une courbe (P); la tangente en M à cette courbe rencontre (D) en un point O; ce point O est le sommet d'un cône circonscrit dont la courbe de contact (C) passe en M. On voit ainsi que, par tout point M de la surface,

Fig. 10.



passe une courbe de chacune des familles considérées. De plus, le plan tangent, mené à la surface le long de (C), coïncidant avec le plan tangent au cône, a pour caractéristique la génératrice MO, qui est tangente à la section (P). Or, la droite conjuguée de cette caractéristique est la tangente MT à la courbe (C). Il suit de là que le réseau formé par les courbes (P) et les courbes (C) est un réseau conjugué.

II. — Lignes asymptotiques; généralités.

4. On appelle *ligne asymptotique* d'une surface une courbe tracée sur cette surface et tangente, en chacun de ses points, à l'une des asymptotes de l'indicatrice. Il ne peut exister de lignes asymptotiques que dans les régions où la surface est à courbures opposées.

D'après cette définition, *la section normale, faite dans une surface par un plan qui contient la tangente à une asympto-*

tique en un point, présente en ce point un rayon de courbure infini. Réciproquement, si une section normale présente, en un point, un rayon de courbure infini, elle est tangente à l'une des asymptotes de l'indicatrice en ce point. Or, la formule (12) du Chapitre précédent, qui fait connaître le rayon de courbure R d'une section normale, peut s'écrire

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = \frac{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}{d\sigma^2}.$$

Si donc il existe des lignes asymptotiques, on aura en chacun de leurs points $R=\infty$ et, par suite,

$$(1) \qquad r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2=0$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1') \qquad dp\,dx+dq\,dy=0.$$

Telle sera, sous deux formes équivalentes, l'équation différentielle des lignes asymptotiques. De la première on tire, dans l'hypothèse $rt-s^2<0$, qui correspond aux courbures opposées,

$$\frac{dy}{dx}=\varphi_1(x,y), \qquad \frac{dy}{dx}=\varphi_2(x,y);$$

les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues aux environs de tout point simple. Donc, *par tout point simple d'une région où la surface est à courbures opposées passent deux lignes asymptotiques.*

5. Voici une propriété caractéristique des lignes asymptotiques, qui permet d'étendre au cas des coordonnées obliques l'équation différentielle de ces courbes, obtenue en supposant les axes rectangulaires : *En tout point d'une ligne asymptotique, le plan osculateur à la courbe est tangent à la surface. Réciproquement, toute courbe dont le plan osculateur reste tangent à une surface est ligne asymptotique de cette surface.* Considérons, en effet, le plan tangent aux divers points (x, y, z) d'une courbe. Son équation étant

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y),$$

pour exprimer qu'il est osculateur (Ch. VI, n° 6) à la courbe lieu du point (x, y, z), on a les deux conditions

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y.$$

La première est vérifiée d'elle-même, puisque la courbe est tracée sur la surface; mais, en la différentiant et tenant compte de la seconde, on retrouve l'équation différentielle des asymptotiques

$$(1') \qquad dp\,dx + dq\,dy = 0,$$

ce qui démontre à la fois la proposition et la réciproque. Il n'y a qu'une exception possible, celle des courbes dont le plan osculateur est indéterminé; mais ces courbes sont des droites, et il est évident que *toute droite, dont les points sont des points simples d'une surface, est une ligne asymptotique de cette surface,* parce que, la section normale qui contient cette droite ayant partout son rayon de courbure infini, la droite se confond avec l'une des asymptotes de l'indicatrice en chacun de ses points.

6. A raison de la propriété que nous venons de reconnaître comme caractérisant les lignes asymptotiques, on dit que *la définition des asymptotiques est projective.* On entend par là que, *si l'on effectue sur une surface une transformation homographique quelconque, les courbes transformées de ses asymptotiques sont les asymptotiques de sa transformée.* Il est clair en effet que, dans cette transformation, un plan osculateur, qui est la limite d'un plan passant par trois points infiniment voisins sur une courbe, se transforme dans le plan osculateur de la courbe correspondante, et qu'un plan tangent devient le plan tangent de la surface transformée. Comme cas particulier de cette proposition capitale, considérons deux surfaces qui aient la même équation, l'une étant rapportée à des axes rectangulaires, l'autre à des axes obliques. Comme chacune d'elles est une transformée homographique de l'autre, leurs lignes asymptotiques ont même équation différentielle puisqu'elles se correspondent et *l'équation*

$$(1') \qquad dp\,dx + dq\,dy = 0$$

est valable en coordonnées obliques comme en coordonnées rectangulaires.

III. — Lignes asymptotiques de certaines surfaces.

7. Avant de l'appliquer à des exemples, nous chercherons directement les asymptotiques de quelques surfaces. *Toute surface réglée a une famille d'asymptotiques composée de ses génératrices;* cela résulte de ce que toute droite tracée sur une surface est une asymptotique (nous étudierons au Chapitre X l'autre famille d'asymptotiques des surfaces réglées). *Les surfaces du second degré ont leurs deux familles d'asymptotiques composées de leurs deux systèmes de génératrices rectilignes.* Sur les surfaces développables, les deux directions asymptotiques sont partout confondues : il en résulte que *les surfaces développables ne présentent qu'une seule famille de lignes asymptotiques, formée de leurs génératrices. Dans le plan, les asymptotiques sont absolument indéterminées,* les plans osculateurs de toute courbe plane étant confondus avec le plan même de la courbe. On démontre les réciproques des deux derniers énoncés en exprimant que l'équation

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0 \tag{1}$$

a ses racines égales ou indéterminées.

Considérons maintenant l'*hélicoïde minimum,* surface engendrée par les normales principales d'une hélice circulaire (H). Ces droites, qui forment une première famille d'asymptotiques, sont toutes perpendiculaires aux génératrices du cylindre qui porte l'hélice (H). Je dis que *tout cylindre de révolution ayant même axe que l'hélice coupe la surface suivant une courbe qui est une de ses lignes asymptotiques.* En effet, cette courbe est une hélice, la distance de chacun de ses points à une section droite du cylindre qui la porte étant proportionnelle à l'arc de cette section droite; elle admet donc pour normales principales les normales principales de l'hélice (H). Par suite, en chacun de ses points son plan osculateur est déterminé par sa tangente et par la génératrice rectiligne de la surface, de sorte qu'il se confond avec le plan tangent; ce qui prouve que *la seconde famille d'asymptotiques de l'hélicoïde minimum est formée de toutes les hélices découpées sur la surface par les cylindres de révolution*

parallèles à son axe. Ajoutons que cet hélicoïde est une *surface minima* (Ch. VII, n° 8); car, ses asymptotiques étant partout orthogonales, l'indicatrice est une hyperbole équilatère.

8. L'hélicoïde minimum est une surface réglée à plan directeur. Nous allons déterminer par le calcul les lignes asymptotiques de toutes les surfaces de cette nature. Si l'on prend pour plan des yz le plan directeur, l'équation

$$z = y\,\varphi(x) + \psi(x)$$

représentera toutes les surfaces en question. On en déduit aisément les dérivées secondes de z, et l'équation générale (1) devient

$$(y\varphi'' + \psi'')\,dx^2 + 2\varphi'\,dx\,dy = 0,$$

les accents désignant des dérivées prises par rapport à x. Cette équation admet d'abord la solution $dx = 0$, qui correspond aux génératrices rectilignes. L'autre famille d'asymptotiques est représentée en projection sur le plan des xy par une équation linéaire, qu'on intègre immédiatement en divisant tous ses termes par $\sqrt{\varphi'}$. On a ainsi successivement

$$2\sqrt{\varphi'}\,dy + y\frac{\varphi''\,dx}{\sqrt{\varphi'}} + \frac{\psi''\,dx}{\sqrt{\varphi'}} = 0,$$

$$2\,d(y\sqrt{\varphi'}) + \frac{\psi''}{\sqrt{\varphi'}}\,dx = 0,$$

$$2y\sqrt{\varphi'} + \int\frac{\psi''}{\sqrt{\varphi'}}\,dx = \text{const.}$$

Le problème dépend donc, quelle que soit la surface, d'une seule quadrature. Dans le cas particulier des *conoïdes,* on peut prendre pour axe des x la directrice rectiligne. Alors la fonction ψ se réduit à zéro, et l'on obtient les asymptotiques, *sans aucune quadrature,* par l'équation

$$y^2\,\varphi'(x) = \text{const.}$$

Si l'on particularise encore de manière à obtenir l'hélicoïde minimum, ce qui se fera en prenant $\varphi(x) = \operatorname{tang}\frac{x}{h}$, on retrouvera le résultat obtenu au paragraphe précédent.

IV. — Lignes de courbure; généralités.

9. Une ligne tracée sur une surface est dite *ligne de courbure* si les normales menées à la surface en tous les points de cette ligne forment une surface développable.

D'après cette définition, *toute courbe tracée sur un plan est ligne de courbure du plan,* les normales formant un cylindre; *toute courbe tracée sur une sphère est ligne de courbure de la sphère,* les normales concourant toutes au centre de la sphère.

Considérons maintenant un point simple $M(x, y, z)$ d'une surface rapportée à des axes rectangulaires. La normale en ce point a pour équations

$$(2) \qquad X = -pZ + x + pz, \qquad Y = -qZ + y + qz.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette droite engendre une développable (Ch. III, n° 12) est

$$\frac{d(x+pz)}{dp} = \frac{d(y+qz)}{dq},$$

ou plus simplement

$$(3) \qquad \frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}.$$

Les courbes cherchées appartenant à la surface, on a

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Il vient donc

$$(4) \qquad \frac{(1+p^2)\,dx + pq\,dy}{r\,dx + s\,dy} = \frac{pq\,dx + (1+q^2)\,dy}{s\,dx + t\,dy}.$$

Telle est l'équation différentielle, du premier ordre et du second degré, dont dépend le problème. Si l'on y remplace dx et dy par α et β, on retrouve l'équation

$$\frac{(1+p^2)\alpha + pq\beta}{r\alpha + s\beta} = \frac{pq\alpha + (1+q^2)\beta}{s\alpha + t\beta},$$

qui détermine les cosinus des directions principales au point M. Donc, l'équation (4) a toujours ses racines réelles et distinctes et

parfaitement déterminées en tout point qui n'est pas un ombilic; on en tire

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = f_2(x, y).$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont continues dans le voisinage du point (x, y); de là résulte l'existence de deux fonctions y satisfaisant à ces équations différentielles et, par suite, de deux courbes qui sont les projections sur le plan xOy des lignes de courbure cherchées. Donc, *par tout point simple, autre qu'un ombilic, passent deux lignes de courbure; elles sont tangentes aux deux directions principales de la surface.* Cette dernière propriété résulte de la substitution déjà faite de α et β à dx et dy dans l'équation (4). A raison de cette propriété, les lignes de courbure forment le seul réseau conjugué et orthogonal (n° 1) qui existe sur une surface autre qu'un plan ou une sphère. Cette remarque importante nous servira plus tard.

10. Le point I où la normale (2) touche son enveloppe a, comme on l'a vu (Ch. III, n° 12), pour coordonnée Z la valeur commune des rapports

$$Z = \frac{d(x + pz)}{dp} = \frac{d(y + qz)}{dq}.$$

On déduit de là

$$Z - z = \frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq},$$

ou encore

$$Z - z = \frac{(1 + p^2)\alpha + pq\beta}{r\alpha + s\beta} = \frac{pq\alpha + (1 + q^2)\beta}{s\alpha + t\beta}.$$

La valeur de ces rapports ayant été trouvée (Ch. VII, n° 8) égale à l'inverse de $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$, le Z du point I est le même, en vertu d'une formule établie antérieurement (Ch. VII, n° 6, *Rem.*), que celui du point N, centre de courbure de la section principale qui correspond à la direction principale (α, β, γ); donc ce point coïncide avec le point N. Ainsi, *quand le point d'incidence d'une normale tend vers un point* M *suivant une ligne de courbure, le point où cette droite touche constamment son enveloppe tend vers le centre de courbure de la section principale, tangente en* M *à la ligne de courbure considérée.*

V. — Lignes de courbure de certaines surfaces.

11. Voici quelques exemples de détermination de lignes de courbure. Pour certaines surfaces on aperçoit immédiatement deux systèmes de lignes de courbure et, comme il n'en existe que deux, le problème est résolu. Pour d'autres surfaces on connaît un premier système de lignes de courbure; le second est alors formé des *trajectoires orthogonales* du premier, c'est-à-dire des courbes de la surface qui coupent à angle droit toutes les lignes de ce système.

Considérons d'abord les surfaces de révolution. Les normales aux divers points d'un parallèle forment un cône de révolution; les normales aux divers points d'un méridien sont dans le plan méridien. Donc, *toute surface de révolution a pour lignes de courbure ses parallèles et ses méridiens.*

Pour les surfaces développables, les génératrices forment un premier système de lignes de courbure, puisque les normales sont perpendiculaires au plan tangent, qui est le même tout le long d'une génératrice, et forment par suite un plan. Le second système de lignes de courbure se compose des trajectoires orthogonales des génératrices, c'est-à-dire des développantes de l'arête de rebroussement. On sait que ces courbes sont déterminées au moyen d'une quadrature (Ch. V, n° 7).

On appelle *surface canal* l'enveloppe d'une sphère de rayon constant dont le centre décrit une courbe gauche (*directrice*). La caractéristique d'une telle sphère est le grand cercle mené perpendiculairement à la directrice. Or tout le long de ce grand cercle la sphère et la surface enveloppe sont tangentes et leurs normales sont dans le plan du grand cercle. Ainsi, *les sections d'une surface canal par les plans normaux de sa directrice sont des lignes de courbure*. Pour définir le second système, remarquons que toute normale à une surface canal est normale à la directrice. Il suit de là qu'*une surface canal est coupée suivant des lignes de courbure par toutes les développables qui ont pour arêtes de rebroussement les développées de sa directrice*. On sait que ces développées dépendent d'une quadrature. Quant aux centres de courbure principaux, l'un coïncide avec le centre de la sphère

enveloppée, l'autre est sur la droite polaire de la directrice. Donc *le lieu des centres de courbure principaux d'une surface canal se compose de la courbe directrice et de sa surface polaire*. C'est là un cas exceptionnel; car, en général, le lieu des centres de courbure principaux d'une surface se compose de deux surfaces ou de deux nappes d'une même surface (*surface des centres de courbure*).

12. Déterminons maintenant les lignes de courbure de quelques surfaces d'après leur équation différentielle. Soit en premier lieu le paraboloïde hyperbolique équilatère. On a pour cette surface

$$az = xy, \qquad ap = y, \qquad aq = x, \qquad a\,dp = dy, \qquad a\,dq = dx.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure

$$(dx + p\,dz)\,dq = (dy + q\,dz)\,dp$$

devient, dans le cas présent,

$$(a^2 + y^2)\,dx^2 = (a^2 + x^2)\,dy^2.$$

Elle se décompose en les deux suivantes

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = 0, \qquad \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = 0,$$

qui ont respectivement pour intégrales

$$x\sqrt{y^2+a^2} + y\sqrt{x^2+a^2} = \text{const.}, \qquad x\sqrt{y^2+a^2} - y\sqrt{x^2+a^2} = \text{const.}$$

Telles sont les deux familles de cylindres qui découpent sur le paraboloïde les deux systèmes de lignes de courbure. On peut transformer ce résultat. En remplaçant sous les radicaux y par $az : x$ et x par $az : y$, on obtient les deux équations

$$\sqrt{x^2+z^2} \pm \sqrt{y^2+z^2} = \text{const.},$$

qui représentent visiblement toutes les surfaces telles que la somme ou la différence des distances de leurs points aux axes des x et des y soit constante. Donc, *les lignes de courbure du paraboloïde équilatère sont sur les surfaces lieux des points dont les distances aux deux génératrices issues du sommet de ce paraboloïde ont une somme ou une différence constante.*

Passons aux quadriques à centre et considérons, par exemple, l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

De cette équation on tire

$$\frac{a^2p}{x}=\frac{b^2q}{y}=-\frac{c^2}{z}, \qquad \frac{r}{y^2-b^2}=\frac{-s}{xy}=\frac{t}{x^2-a^2}=\frac{c^4}{a^2b^2z^3}.$$

Substituant ces expressions dans l'équation générale des lignes de courbure

$$\begin{aligned}&[pqr-(1+p^2)s]\,dx^2\\&\quad+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\,dx\,dy+[(1+q^2)s-pqt]\,dy^2=0\end{aligned}$$

et remplaçant z par sa valeur en x et y, on trouve, tous calculs faits,

$$b^2\beta xy\,dx^2-(b^2\beta x^2-a^2\alpha y^2+a^2b^2\gamma)\,dx\,dy-a^2\alpha xy\,dy^2=0,$$

en posant, pour abréger,

$$\alpha=b^2-c^2, \qquad \beta=c^2-a^2, \qquad \gamma=a^2-b^2.$$

Pour intégrer l'équation précédente, remarquons que, si un point (x, y) appartient à la projection d'une ligne de courbure, il en sera de même du point symétrique par rapport à l'origine. Ceci conduit à prendre pour nouvelles variables $x^2=\xi$ et $y^2=\eta$. Il vient ainsi

$$b^2\beta\eta\,d\xi^2-(b^2\beta\xi-a^2\alpha\eta+a^2b^2\gamma)\,d\xi\,d\eta-a^2\alpha\xi\,d\eta^2=0.$$

C'est une équation où les variables n'entrent plus qu'au premier degré. Résolvant par rapport à η et appelant η' la dérivée de η par rapport à ξ, nous trouvons

$$\eta=\xi\eta'+\frac{a^2b^2\gamma\eta'}{a^2\alpha\eta'+b^2\beta},$$

équation de Clairaut dont on obtient l'intégrale en remplaçant la dérivée η' par une constante arbitraire. On a donc

$$y^2=Cx^2+\frac{Ca^2b^2\gamma}{Ca^2\alpha+b^2\beta},$$

d'où ce théorème, dû à Monge : *Les lignes de courbure d'une quadrique à centre se projettent sur l'un de ses plans de symétrie suivant deux familles de coniques.* Il suit de là que ces lignes sont des intersections de quadriques, résultat qui sera retrouvé et complété au Chapitre suivant.

VI. — Théorème de Joachimsthal; surfaces de Monge.

13. Théorème de Joachimsthal. — *Si deux surfaces ont une ligne de courbure commune, elles se coupent sous le même angle en tous les points de cette courbe.*

Réciproquement, *si deux surfaces se coupent sous un angle constant tout le long d'une courbe et si cette courbe est ligne de courbure pour l'une des surfaces, elle l'est aussi pour l'autre.*

Soient (S) et (S′) les deux surfaces, (C) la ligne de courbure supposée commune à (S) et à (S′). Les normales MN menées à la surface (S) le long de la ligne de courbure (C) forment une développable; pareillement les normales MN′ menées à la surface (S′) le long de (C) forment une développable. Les unes et les autres sont normales à la courbe (C). Or on a vu dans la théorie des développées (Ch. V, n° 10) que, quand deux familles de normales à une même courbe (C) forment des développables, les deux normales de chaque famille qui ont même point d'incidence font un angle constant tout le long de (C). Ainsi l'angle des normales aux deux surfaces est le même en tous les points de leur ligne de courbure commune.

Supposons maintenant que les normales aux deux surfaces (S) et (S′) fassent le même angle θ tout le long d'une courbe commune (C), supposée ligne de courbure pour (S). Les normales MN menées à la surface (S) le long de (C) forment une développable; faisons tourner chacune d'elles d'un angle θ autour de la tangente en son point d'incidence M avec la courbe (C), de manière qu'elle vienne coïncider avec la normale à la surface (S′). On sait que dans ces nouvelles positions elles formeront encore une développable. Par suite, la ligne (C) est ligne de courbure pour (S′) comme pour (S).

14. Le théorème de Joachimsthal joue un grand rôle dans la théorie des lignes de courbure, à raison de ce que toute ligne plane est ligne de courbure du plan et toute ligne sphérique ligne de courbure de la sphère. On voit, en effet, que, *si un plan ou une sphère coupe une surface suivant une de ses lignes de courbure, les deux surfaces font un angle constant tout le long de cette ligne*. Réciproquement, *si un plan ou une sphère coupe une surface sous un angle constant tout le long d'une courbe, cette courbe est une ligne de courbure pour la surface.*

De là résulte un moyen pour déterminer des surfaces admettant une famille de lignes de courbure planes. En effet, d'après ce qui précède, *pour qu'une série de sections planes soient lignes de courbure d'une surface, il faut et il suffit que la normale à la surface et la normale au plan de chaque section fassent un angle constant tout le long de cette section*. En général, cet angle varie d'une section plane à une autre. Nous allons étudier le cas particulier où il est constamment droit, quelle que soit la ligne de courbure considérée. Proposons-nous la question suivante : *Quand un plan* (P) *se meut en restant normal à une courbe gauche, comment doit varier une courbe, tracée dans ce plan, pour que la surface qu'elle engendre et le plan qui la contient se coupent à angle droit en tous les points de cette courbe?*

Considérons le plan (P) dans l'une de ses positions; soit M son point d'incidence sur la courbe (C). Dans le plan (P) traçons une courbe (Γ) que nous rapporterons à la normale principale MN et à la binormale MB de la courbe gauche (C), prises pour axes mobiles. Si s désigne l'arc de (C) terminé en M, les coordonnées x, y, z de ce point ne dépendront que de s, et il en sera de même des cosinus α', ..., γ'' des axes mobiles. Les coordonnées relatives ξ_1, η_1 des points M_1 de la courbe (Γ) dépendront d'un paramètre t, et aussi de s, cette courbe pouvant varier dans son plan pendant qu'il se déplace. D'après cela, les coordonnées absolues x_1, y_1, z_1 des points M_1 auront pour expressions

$$(5)\qquad x_1 = x + \alpha'\xi_1 + \alpha''\eta_1,\quad y_1 = y + \beta'\xi_1 + \beta''\eta_1,\quad z_1 = z + \gamma'\xi_1 + \gamma''\eta_1.$$

Ces formules représentent la surface (S) que les courbes (Γ) engendrent et dont elles forment un premier système de lignes de

courbure ($s =$ const.). Le second est constitué par les trajectoires orthogonales des courbes (Γ) et nous choisirons le paramètre t de telle sorte qu'il soit constant sur chacune de ces trajectoires. Soit M_1T_1 la tangente à l'une des courbes du système $t =$ const. Elle est perpendiculaire, par définition, à la tangente M_1S_1 de la courbe (Γ); or le plan tangent $S_1M_1T_1$ de la surface (S) est, par hypothèse, perpendiculaire à (P) tout le long de (Γ); donc la droite M_1T_1, perpendiculaire à l'intersection M_1S_1 de ces deux plans, est perpendiculaire au plan (P), ou encore à deux droites MN et MB de ce plan. Pour avoir les coefficients directeurs de la tangente M_1T_1, différentions les relations (5) par rapport à s, en tenant compte des formules fondamentales de la théorie des courbes gauches (Ch. V, n° 1). Nous trouvons ainsi

$$\frac{\partial x_1}{\partial s} = \alpha\left(1 - \frac{\xi_1}{R}\right) + \alpha'\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial s} + \frac{\eta_1}{T}\right) + \alpha''\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial s} - \frac{\xi_1}{T}\right),$$

et deux expressions analogues pour les dérivées de y_1 et z_1. La droite M_1T_1 étant perpendiculaire à MB et à MN, on doit avoir

$$\alpha'\frac{\partial x_1}{\partial s} + \beta'\frac{\partial y_1}{\partial s} + \gamma'\frac{\partial z_1}{\partial s} = 0,$$

$$\alpha''\frac{\partial x_1}{\partial s} + \beta''\frac{\partial y_1}{\partial s} + \gamma''\frac{\partial z_1}{\partial s} = 0.$$

Ces conditions reviennent aux suivantes

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial s} + \frac{\eta_1}{T} = 0, \qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial s} - \frac{\xi_1}{T} = 0.$$

De là, par le changement de variable $d\varphi = ds : T$, on déduit

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} + \eta_1 = 0, \qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial \varphi} - \xi_1 = 0$$

et, en éliminant ξ_1,

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \varphi^2} + \eta_1 = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation linéaire est

$$\eta_1 = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi,$$

ξ et η désignant deux fonctions arbitraires du paramètre t; différentiée par rapport à φ, elle donne

$$\xi_1 = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi.$$

On voit par là que la courbe (Γ), lieu du point (ξ_1, η_1), se déduit de la courbe lieu du point (ξ, η) par une simple rotation d'amplitude égale à φ, effectuée autour de la tangente à la courbe (C), dans le sens de MN vers MB. Or la forme de cette courbe est indépendante de s, puisque ξ et η n'en dépendent pas; donc :

Une courbe (Γ) *étant tracée sur un plan* (P), *qui se meut en restant normal à une courbe gauche* (C), *pour que la surface qu'elle engendre fasse un angle droit avec le plan* (P) *en tous les points de cette courbe* (Γ), *il faut et il suffit que* (Γ) *ait une forme invariable et que la droite qui joint un point fixe de* (Γ) *au point d'incidence* M *du plan* (P) *sur la courbe* (C) *engendre une surface développable.*

Ce théorème, qu'on pourrait établir géométriquement, fait connaître une classe étendue de surfaces (S), déjà rencontrées au Chapitre VI (n° 10), dont une famille de lignes de courbure est évidemment composée des diverses positions de (Γ). Les coordonnées des points (x_1, y_1, z_1) de ces surfaces sont représentées par les formules (5) quand on y suppose ξ_1 et η_1 remplacées par leurs expressions

$$\xi_1 = \xi(t) \cos\varphi - \eta(t) \sin\varphi, \qquad \eta_1 = \xi(t) \sin\varphi + \eta(t) \cos\varphi.$$

Or, nous avons vu que, si l'on fixe t, ce qui donne une ligne de courbure du second système, ξ et η sont constants; ainsi *chacune des lignes de courbure du second système est le lieu que décrit un point déterminé de la courbe* (Γ). Si donc on se donne la courbe directrice (C) et la génératrice plane (Γ), une fois effectuée la quadrature qui fournit l'angle φ et, par suite, les coordonnées de la surface (S), on connaîtra *sans aucune intégration* toutes les lignes de courbure de cette surface.

Remarque. — Les surfaces dont nous venons de nous occuper ont été considérées d'abord et étudiées par Monge, qui les caractérisait comme *ayant toutes leurs normales tangentes à une même développable.* En effet, la normale en un point quelconque

d'une telle surface est située dans le plan de la ligne de courbure (Γ) qui passe en ce point. Or ce plan (P), étant normal à la courbe (C), enveloppe sa surface polaire, qui est une développable. Donc la normale considérée peut être regardée comme étant une tangente à cette développable.

15. Comme cas particulier des *surfaces de Monge,* on obtient les *surfaces moulures* quand la courbe (C) est plane. Dans ce cas, la différentielle de φ étant nulle, cet angle est constant et peut être supposé nul. De là cette génération des surfaces moulures : *Un plan où l'on a tracé deux axes rectangulaires et une courbe* (Γ), *se meut en restant normal à une courbe plane* (C) *de telle façon que l'un des axes qu'il porte coïncide constamment avec la normale principale, l'autre avec la binormale de* (C). *La courbe* (Γ) *engendre une surface moulure.*

Ses diverses positions forment un premier système de lignes de courbure. Le second se compose des sections de la surface par les plans parallèles au plan de la courbe (C). En effet, si $z = 0$ est l'équation de ce plan, les coordonnées de la moulure sont représentées par les formules

$$x_1 = x + \alpha'\xi(t), \qquad y_1 = y + \beta'\xi(t), \qquad z_1 = \eta(t),$$

et l'on voit que les lignes de courbure qui correspondent à des valeurs constantes de t sont dans des plans $z_1 =$ const. Ces formules montrent, en outre, que les projections des lignes de courbure $z_1 =$ const. sont des courbes *parallèles* à la courbe (C), à la distance $\xi(t)$, qui varie de l'une à l'autre. De là une autre génération des surfaces moulures : *Une famille de courbes parallèles étant tracées dans un plan, on donne à chacune d'elles une translation perpendiculaire à ce plan, et dont la grandeur varie de l'une à l'autre suivant une loi donnée. Le lieu des positions nouvelles de ces courbes est une surface moulure.*

Ce qui précède conduit à chercher toutes les surfaces qui admettent pour lignes de courbure d'un système des courbes (Γ) situées dans des plans parallèles. On peut prouver géométriquement que, si ces plans sont horizontaux, les lignes de courbure du second système sont toutes dans des plans verticaux. En effet, toute ligne de courbure (C_1) de ce système étant perpendiculaire

à toutes les courbes (Γ), on obtient la tangente MT en un point M de l'une d'elles en faisant tourner d'un angle droit, dans le plan normal à (C_1), la normale MN à la surface. Or, cette normale MN engendre une développable ; il en sera donc de même (Ch. V, n° 10) de la tangente MT menée le long de (C_1) aux diverses sections horizontales (Γ). Mais ces tangentes, étant toutes horizontales, ne peuvent former d'autre développable qu'un cylindre, circonscrit à la surface le long de (C_1). D'après la réciproque du théorème de Joachimsthal, (C_1) sera ligne de courbure et, par suite, section droite du cylindre. Elle sera donc située dans un plan vertical, puisque le cylindre est horizontal. Pour achever la solution, remarquons que les traces de ces divers plans verticaux sur le plan horizontal ont une enveloppe, puisqu'elles forment une famille ; par suite, elles sont toutes normales à une développante (C) de cette enveloppe. Or, si l'on figure sur le plan horizontal les projections des lignes de courbure (Γ), elles couperont à angle droit toutes les normales de cette courbe (C). Ce seront donc des courbes parallèles à (C), et la surface, étant susceptible du mode de génération indiqué en dernier lieu, sera une surface moulure.

16. Considérons encore les surfaces de Monge pour lesquelles la courbe (C) est tracée sur une sphère (Σ). *Les lignes de courbure d'un système sont sur des sphères,* qui ont même centre O que (Σ). Soit en effet M_1 un point fixe d'une courbe (Γ), dont le plan est normal à (C) en M, et $M\mu$ celle des normales à (C) qui est tangente à (Σ). La distance MM_1 est constante, la figure formée par (Γ) et M étant invariable. Or l'angle $M_1 M\mu$ est constant, puisque MM_1 engendre une développable (n° 14) et qu'il en est de même de $M\mu$ (Ch. VI, n° 11, *Rem.*). Donc la figure OMM_1 est invariable, et le lieu de M_1, qui est une ligne de courbure (n° 14), est sur une sphère ayant pour centre le point O.

CHAPITRE IX.

SECTIONS PRINCIPALES, LIGNES ASYMPTOTIQUES ET LIGNES DE COURBURE EN COORDONNÉES CURVILIGNES.

I. — Rayons de courbure des sections normales. Rayons de courbure principaux.

1. La solution des problèmes relatifs aux lignes tracées sur les surfaces étant souvent facilitée par l'emploi de coordonnées curvilignes convenables, nous reprendrons dans ce Chapitre les questions qui font l'objet des deux précédents, en supposant que les coordonnées rectangulaires x, y, z des points d'une surface sont exprimées par trois fonctions connues de deux paramètres

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v).$$

Pour calculer le rayon de courbure R d'une section normale, nous partirons de la formule

$$(1) \qquad R = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z},$$

établie précédemment (Chap. VII, n° 1). Le numérateur de R est l'élément linéaire (ou *première forme fondamentale*)

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

que nous avons calculé au Chapitre II (n° 13). Rappelons que nous avons posé en cet endroit

$$(2) \qquad \begin{cases} E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2, \\ F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v', \\ G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2, \end{cases}$$

et obtenu, pour les cosinus de la direction positive de la normale, les valeurs suivantes :

$$(3)\quad a = \frac{y'_u z'_v - z'_u y'_v}{H}, \qquad b = \frac{z'_u x'_v - x'_u z'_v}{H}, \qquad c = \frac{x'_u y'_v - y'_u x'_v}{H},$$

où H représente la racine carrée arithmétique de $EG - F^2$.

Nous pouvons maintenant former le dénominateur de R. A cet effet, différentions les identités telles que $dx = x'_u du + x'_v dv$; nous trouverons

$$d^2x = x'_u d^2u + x'_v d^2v + x''_{u^2} du^2 + 2x''_{uv} du\, dv + x''_{v^2} dv^2$$

et deux expressions analogues pour d^2y et d^2z. En tenant compte des deux identités

$$ax'_u + by'_u + cz'_u = 0, \qquad ax'_v + by'_v + cz'_v = 0,$$

on voit que l'expression différentielle proposée devient

$$(4)\qquad a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = \frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''dv^2}{H},$$

si l'on pose, pour abréger,

$$(5)\qquad \begin{cases} D = H(ax''_{u^2} + by''_{u^2} + cz''_{u^2}), \\ D' = H(ax''_{uv} + by''_{uv} + cz''_{uv}), \\ D'' = H(ax''_{v^2} + by''_{v^2} + cz''_{v^2}). \end{cases}$$

Le résultat de ces transformations est la formule cherchée

$$(6)\qquad \frac{R}{H} = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''dv^2}.$$

Eu égard aux valeurs trouvées pour a, b, c, les lettres D, D′, D″ représentent les développements des trois déterminants ci-dessous :

$$D = \begin{vmatrix} x''_{u^2} & x'_u & x'_v \\ y''_{u^2} & y'_u & y'_v \\ z''_{u^2} & z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \qquad D' = \begin{vmatrix} x''_{uv} & x'_u & x'_v \\ y''_{uv} & y'_u & y'_v \\ z''_{uv} & z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \qquad D'' = \begin{vmatrix} x''_{v^2} & x'_u & x'_v \\ y''_{v^2} & y'_u & y'_v \\ z''_{v^2} & z'_u & z'_v \end{vmatrix}.$$

On voit que le dénominateur de R est une forme quadratique par rapport aux différentielles du, dv (*seconde forme fondamentale*). Ses coefficients dépendent des dérivées secondes de x, y, z, tandis que ceux de l'élément linéaire ne contiennent que les

dérivées premières. Dans les conditions où nous nous plaçons, l'élément linéaire est toujours positif; le dénominateur de R est une somme de carrés dans les régions où la surface est convexe (puisqu'il doit conserver le même signe, quelque valeur qu'on attribue au rapport $du : dv$); une différence de carrés dans les régions où la surface est à courbures opposées; un carré parfait aux points paraboliques. Ces points correspondent donc aux solutions de l'équation $DD'' - D'^2 = 0$, et forment en général des lignes sur la surface.

2. Cherchons maintenant les rayons de courbure principaux. D'après la formule

$$(6) \qquad \frac{R}{H} = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2},$$

où u et v reçoivent des valeurs fixes, R varie avec le rapport $du : dv$. Il n'y a d'exception que si la fraction (6) est indépendante de du et de dv, c'est-à-dire pour les points où l'on a

$$\frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}.$$

Ces points, où toutes les sections normales ont même courbure, sont les *ombilics*. Leurs coordonnées curvilignes étant les solutions de ces deux équations, les ombilics sont généralement en nombre limité. En tout point autre qu'un ombilic, à une valeur donnée de R correspondent, pour le rapport $du : dv$, deux valeurs en général différentes. Mais, quand R est maximum ou minimum, ces deux valeurs deviennent égales, d'après une propriété élémentaire des fractions rationnelles du second degré. Si donc nous exprimons que l'équation

$$(6)' \qquad (DR - EH)\,du^2 + 2(D'R - FH)\,du\,dv + (D''R - GH)\,dv^2 = 0$$

a pour premier membre un carré parfait, nous aurons *l'équation aux rayons de courbure principaux*

$$(7) \qquad (D'R - FH)^2 - (DR - EH)(D''R - GH) = 0,$$

qui, développée, s'écrit

$$(7)' \qquad (DD'' - D'^2)\,R^2 - (GD - 2FD' + ED'')\,HR + H^4 = 0.$$

Elle a ses racines réelles; car la substitution $R = 0$ donne au premier membre du trinôme (7) le signe *moins*, tandis que les substitutions

$$R = \frac{EH}{D}, \qquad R = \frac{GH}{D''}$$

lui donnent le signe *plus*. Ses racines étant R_1 et R_2, on a, pour la courbure totale et pour la courbure moyenne,

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{DD'' - D'^2}{H^4}, \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{GD - 2FD' + ED''}{H^3},$$

en vertu des définitions données antérieurement (Ch. VII, n° 8).

II. — Équations différentielles des lignes de courbure et des lignes asymptotiques.

3. En vue de trouver les directions principales, c'est-à-dire les valeurs du rapport $du : dv$ qui rendent la fraction (6) maxima ou minima, remplaçons ce rapport par λ et introduisons une variable d'homogénéité μ. Nous aurons

$$\frac{R}{H} = \frac{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2}{D\lambda^2 + 2D'\lambda\mu + D''\mu^2} = \frac{P(\lambda, \mu)}{Q(\lambda, \mu)}.$$

Les valeurs cherchées de λ sont les racines de l'équation

$$(8) \qquad QP'_\lambda - PQ'_\lambda = 0,$$

qu'on obtient en différentiant par rapport à λ l'expression de R. Mais, comme R est une fonction homogène et du degré zéro en λ et μ, on a identiquement, d'après un théorème bien connu,

$$\lambda R'_\lambda + \mu R'_\mu = 0.$$

Or, R'_λ étant nul, on aura aussi $R'_\mu = 0$, ou bien

$$(9) \qquad QP'_\mu - PQ'_\mu = 0.$$

Des relations (8) et (9) on tire

$$(10) \qquad \frac{P}{Q} = \frac{P'_\lambda}{Q'_\lambda} = \frac{P'_\mu}{Q'_\mu}.$$

En égalant les deux derniers rapports, on a, sous une forme facile

à retenir, l'équation qui détermine *les directions principales,*

$$(11) \qquad \frac{E\,du + F\,dv}{D\,du + D'\,dv} = \frac{F\,du + G\,dv}{D'\,du + D''\,dv}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, cette équation devient

$$(11)' \quad (FD'' - GD')\,dv^2 - (GD - ED'')\,du\,dv + (ED' - FD)\,du^2 = 0.$$

C'est aussi l'*équation différentielle des lignes de courbure,* quand on y considère u et v comme variables. On a vu, en effet, que les lignes de courbure sont tangentes en chacun de leurs points à l'une des directions principales de la surface. Le rapport $du : dv$ a donc pour ces lignes la même valeur que pour les directions principales. Remarquons que l'équation (11), ne déterminant plus le rapport $du : dv$ quand le point (u, v) est un ombilic, n'apprend rien sur les lignes de courbure en un tel point.

D'après les relations (10), la valeur commune des rapports (11) n'est autre chose que R : H. En écrivant cette double égalité, ce qui donne

$$(DR - EH)\,du + (D'R - FH)\,dv = 0,$$
$$(D'R - FH)\,dv + (D''R - GH)\,dv = 0,$$

et éliminant $du : dv$ entre ces deux relations, on retrouverait l'équation aux rayons de courbure principaux (7).

4. Si, au lieu de chercher les maxima et minima de R, on veut déterminer les directions asymptotiques de la surface, c'est-à-dire les valeurs de $du : dv$ pour lesquelles le rayon de courbure de la section normale est infini, il n'y a qu'à annuler le dénominateur de la formule (6); on trouve ainsi

$$(12) \qquad D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0.$$

Cette équation, quand on y considère u et v comme variables, est *l'équation différentielle des lignes asymptotiques,* puisque ces lignes sont, par définition, tangentes en chacun de leurs points à l'une des asymptotes de l'indicatrice.

On peut arriver à cette équation, sans supposer les coordonnées rectangulaires, en établissant entre u et v une relation telle que le plan osculateur en chaque point de la courbe ainsi obtenue

soit tangent en ce point à la surface (Ch. VIII, n° 5). Le plan tangent en un point (x, y, z) de la surface a pour équation

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

les coefficients A, B, C vérifiant les conditions

$$(13) \qquad \begin{cases} A x'_u + B y'_u + C z'_u = 0, \\ A x'_v + B y'_v + C z'_v = 0. \end{cases}$$

Pour que ce plan soit osculateur à la courbe lieu du point (x, y, z) il faut et il suffit (Ch. VI, n° 6) que A, B, C satisfassent aux deux relations

$$\begin{aligned} A\,dx + B\,dy + C\,dz &= 0, \\ A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z &= 0. \end{aligned}$$

La première est vérifiée en vertu des conditions (13). La seconde,

$$\Sigma A(x'_u d^2u + x'_v d^2v + x''_{u^2} du^2 + 2x''_{uv} du\,dv + x''_{v^2} dv^2) = 0,$$

se réduit, en vertu des conditions (13), à

$$(14) \qquad \Sigma A(x''_{u^2} du^2 + 2x''_{uv} du\,dv + x''_{v^2} dv^2) = 0.$$

Éliminons A, B et C entre les équations (13) et (14). Il vient

$$\begin{vmatrix} x''_{u^2} du^2 + 2x''_{uv} du\,dv + x''_{v^2} dv^2 & x'_u & x'_v \\ y''_{u^2} du^2 + 2y''_{uv} du\,dv + y''_{v^2} dv^2 & y'_u & y'_v \\ z''_{u^2} du^2 + 2z''_{uv} du\,dv + z''_{v^2} dv^2 & z'_u & z'_v \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui n'est autre chose que

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0,$$

à raison de la signification attribuée précédemment (n° 1) aux lettres D, D′, D″.

III. — Lignes de courbure et asymptotiques de certaines surfaces.

5. *Hélicoïdes.* — On appelle *hélicoïde* toute surface engendrée par une courbe de forme invariable qui tourne autour d'une droite fixe, en même temps qu'elle se déplace parallèlement à cet *axe* de longueurs proportionnelles aux angles dont elle tourne.

Il est visible que si cette translation est nulle, l'hélicoïde dégénère en une surface de révolution.

Tous les points de la courbe génératrice décrivant des hélices circulaires dont l'axe commun est celui de la surface et dont le pas est le même, on peut considérer un hélicoïde comme engendré par la courbe (appelée *profil*) suivant laquelle il est coupé par un plan contenant son axe. Prenons pour axe de l'hélicoïde l'axe des z. Soit $z = \varphi(u)$ l'équation du profil dans son plan, u désignant la distance d'un point à l'axe; soit v l'angle que fait le plan du profil avec celui des zx. Soit enfin h la translation du profil pour une rotation égale à l'unité d'angle. Les coordonnées des points de la surface seront représentées par les formules

$$(15) \qquad x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = \varphi(u) + hv,$$

d'où l'on déduit, par des calculs simples,

$$E = 1 + \varphi'^2, \qquad F = h\varphi', \qquad G = u^2 + h^2;$$
$$D = u\varphi'', \qquad D' = -h, \qquad D'' = u^2\varphi',$$

φ' et φ'' étant les dérivées première et seconde de $\varphi(u)$. Il faut remarquer que les six fonctions ci-dessus ne dépendent que de u. Il en est donc de même des coefficients de l'équation aux rayons de courbure principaux; par suite ces rayons sont des fonctions de la seule variable u. Ainsi, *les hélicoïdes appartiennent à la classe des surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre.*

En vertu de la même remarque, les coefficients des équations différentielles des asymptotiques et des lignes de courbure seront des fonctions de u seulement. Chacune de ces équations donnera donc pour $dv : du$ deux fonctions de u. En conséquence, *les lignes asymptotiques et les lignes de courbure des hélicoïdes sont déterminées par des quadratures.*

Dans le cas particulier des surfaces de révolution, h étant nul, F et D' sont nuls. L'équation des lignes de courbure se réduit à $du\,dv = 0$. Elle donne $u =$ const. et $v =$ const., c'est-à-dire les parallèles et les méridiens, résultat déjà trouvé (Ch. VIII, n° 11). Quant aux asymptotiques, leurs équations sont respectivement

$$v - \int\sqrt{\frac{-\varphi''(u)}{u\,\varphi'(u)}}\,du = \text{const.}, \qquad v + \int\sqrt{\frac{-\varphi''(u)}{u\,\varphi'(u)}}\,du = \text{const.}$$

On voit que leur détermination n'exige qu'une quadrature.

6. *Surfaces spirales.* — Considérons une surface de révolution

$$x_1 = u\cos v, \qquad y_1 = u\sin v, \qquad z_1 = \varphi(u).$$

A chaque méridien $v = \text{const.}$ substituons son homothétique par rapport à un point fixe de l'axe, pris pour origine, le rapport d'homothétie étant e^{av}. Nous obtiendrons une surface *spirale*. Ses coordonnées auront pour expressions

$$(16) \qquad x = ue^{av}\cos v, \qquad y = ue^{av}\sin v, \qquad z = \varphi(u)e^{av}.$$

On peut dire qu'une *spirale* est une surface engendrée par une courbe plane qui tourne autour d'une droite de son plan, en restant homothétique à elle-même par rapport à un point fixe de cette droite, et dont les dimensions croissent en progression géométrique quand les angles dont tourne son plan croissent en progression arithmétique. Dans l'hypothèse $a = 0$, la spirale se réduit à une surface de révolution. On trouve facilement dans le cas général

$$E = e^{2av}(1+\varphi'^2), \quad F = ae^{2av}(\varphi\varphi' + u), \quad G = e^{2av}[a^2\varphi^2 + (1+a^2)u^2],$$
$$D = e^{3av}u\varphi'', \qquad D' = ae^{3av}(u\varphi' - \varphi), \quad D'' = ue^{3av}[(1+a^2)u\varphi' - a^2\varphi],$$

φ' et φ'' étant les dérivées première et seconde de $\varphi(u)$. Il suit de là que les coefficients des équations différentielles des asymptotiques et des lignes de courbure deviennent, par la suppression d'un facteur exponentiel, des fonctions de la seule variable u. En conséquence, *les lignes asymptotiques et les lignes de courbure des spirales sont déterminées par des quadratures.*

7. *Remarque.* — On aurait pu, avant tout calcul, prouver que les deux familles d'asymptotiques et de lignes de courbure, tant des spirales que des hélicoïdes, sont représentées par des équations finies de la forme

$$v + \psi(u) = \text{const.},$$

ce qui montre que leurs équations différentielles sont intégrables par quadratures.

Considérons, en effet, sur un hélicoïde (H) représenté par les équations (15), deux courbes (C) et (C_0) définies respectivement par les équations

$$(17) \qquad v = U(u), \qquad v = U(u) - v_0,$$

où v_0 est une constante arbitraire. Les coordonnées de (C) auront pour expressions

$$\xi = u\cos U, \qquad \eta = u\sin U, \qquad \zeta = \varphi(u) + hU.$$

Celles de (C_0) se déduiraient des précédentes par le changement de U en $U - v_0$. Cela posé, donnons à la figure (H, C_0), formée par l'hélicoïde (H) et la courbe (C_0), le déplacement qui résulte d'une rotation, d'amplitude v_0, autour de Oz, et d'une translation hv_0 parallèle à cet axe. A la suite de ce déplacement, l'hélicoïde vient coïncider avec sa position primitive (H), et les nouvelles coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 de la courbe (C_0) deviennent respectivement identiques à ξ, η, ζ. Ainsi la figure (H, C_0) est superposable à la figure (H, C). Si donc (C) est ligne de courbure ou asymptotique de (H), il en est de même de (C_0), ce qui justifie notre assertion.

Considérons pareillement, sur la spirale (S) représentée par les équations (16), deux courbes (C) et (C_0) déterminées respectivement par les équations (17). Les coordonnées de (C) auront pour expressions

$$\xi = ue^{aU}\cos U, \qquad \eta = ue^{aU}\sin U, \qquad \zeta = \varphi(u)e^{aU}.$$

Celles de (C_0) se déduiraient des précédentes par le changement de U en $U - v_0$. Cela étant, faisons tourner de l'angle v_0 autour de Oz la figure (S, C_0), formée par la surface (S) et la courbe (C_0). Les équations qui représentent (S) et (C_0) dans leurs nouvelles positions (S_1) et (C_1) sont respectivement les suivantes :

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = e^{av_0},$$

$$\frac{\xi_1}{\xi} = \frac{\eta_1}{\eta} = \frac{\zeta_1}{\zeta} = e^{av_0}.$$

Ainsi la figure (S_1, C_1) et la figure (S, C) sont homothétiques par rapport à l'origine. Si donc (C) est asymptotique ou ligne de courbure de (S), la courbe (C_1) l'est aussi pour (S_1), ce qui prouve bien que (C_0) est asymptotique ou ligne de courbure de (S), comme nous l'avions annoncé.

8. *Autres exemples.* — Toute surface peut être regardée comme l'enveloppe des cylindres qui lui sont circonscrits et qui ont leurs génératrices parallèles à toutes les droites d'un même plan ($x = 0$). Elle est donc représentée par les équations

$$(18) \qquad z + vy = f(x, v), \qquad y = f'_v,$$

dont la première est celle d'un des cylindres considérés et dont la seconde résulte de la première par différentiation (Ch. III, n° 15).

Cherchons les asymptotiques de la surface ainsi définie, en formant l'équation

$$dp\,dx + dq\,dy = 0.$$

Des équations (18) on déduit

$$dz = f'_x dx + y\,dv - d(vy) = f'_x dx - v\,dy,$$

d'où, par comparaison avec $p\,dx + q\,dy$, on conclut

$$p = f'_x, \qquad q = -v.$$

Dès lors on a identiquement

$$dp\,dx + dq\,dy = (f''_{x^2}\,dx + f''_{xv}\,dv)\,dx - (f''_{xv}\,dx + f''_{v^2}\,dv)\,dv.$$

L'équation différentielle des asymptotiques est donc

$$f''_{x^2}\,dx^2 - f''_{v^2}\,dv^2 = 0.$$

Cette équation rentre dans le type

$$\varphi(x)\,dx^2 - \psi(v)\,dv^2 = 0,$$

et, conséquemment, s'intègre par quadratures, quand la fonction f admet, entre autres formes, l'une des deux suivantes

$$f = \mathrm{X}(x)\,\mathrm{V}(v), \qquad f = (mv + n)\,\mathrm{X}(x) + (m'x + n')\,\mathrm{V}(v),$$

les deux fonctions X et V étant arbitraires, ainsi que les quatre constantes m, n, m', n'. On vérifiera sans peine cette propriété des deux classes de surfaces correspondantes : *Les courbes de contact des cylindres circonscrits parallèlement à un plan fixe* ($x = 0$) *sont des courbes planes dont les plans passent par une droite fixe.*

IV. — Directions conjuguées et réseaux conjugués.

9. Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que deux directions (du, dv) et $(\delta u, \delta v)$ soient conjuguées. Posons

$$l = y'_u z'_v - z'_u y'_v, \qquad m = z'_u x'_v - z'_u x'_v, \qquad n = x'_u y'_v - y'_v x'_v.$$

Le plan tangent en un point de la surface a pour équation

$$(19) \qquad l(X - x) + m(Y - y) + n(Z - z) = 0.$$

Si nous le supposons mené le long d'une courbe dont la tangente a en chaque point la direction (du, dv), sa caractéristique sera représentée par l'équation précédente, jointe à sa différentielle

$$(20) \qquad \sum (X - x)\left(\frac{\partial l}{\partial u}\, du + \frac{\partial l}{\partial v}\, dv\right) = 0,$$

que nous avons simplifiée en tenant compte des identités

$$(21) \qquad \Sigma\, l x'_u = 0, \qquad \Sigma\, l x'_v = 0.$$

D'autre part, les coefficients directeurs de la direction $(\delta u, \delta v)$ ont pour valeurs

$$(22) \qquad \frac{\partial x}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\delta v, \qquad \frac{\partial y}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\delta v, \qquad \frac{\partial z}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\,\delta v.$$

Nous avons à exprimer que les binômes $X - x$, $Y - y$, $Z - z$, tirés des équations de la caractéristique, sont proportionnels à ces coefficients. Portons donc les valeurs (22) à la place de $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ dans les équations (19) et (20). La première est vérifiée en vertu des identités (21); la seconde donne

$$(20)' \qquad \begin{cases} 0 = \Sigma(x'_u \delta u + x'_v \delta v)(l'_u du + l'_v dv) \\ \quad = du\,\delta u\,\Sigma x'_u l'_u + du\,\delta v\,\Sigma x'_v l'_u + dv\,\delta u\,\Sigma x'_u l'_v + dv\,\delta v\,\Sigma x'_v l'_v. \end{cases}$$

Mais, si l'on tient compte des identités (21) et des formules (5) qui définissent D, D′, D″, on trouve

$$-\Sigma x'_u l'_u = \Sigma\, l x''_{u^2} = D, \qquad -\Sigma x'_u l'_v = \Sigma\, l x''_{uv} = D',$$
$$-\Sigma x'_v l'_u = \Sigma\, l x''_{uv} = D', \qquad -\Sigma x'_v l'_v = \Sigma\, l x''_{v^2} = D''.$$

La relation $(20)'$ devient alors

$$D\,du\,\delta u + D'(du\,\delta v + dv\,\delta u) + D''dv\,\delta v = 0. \tag{23}$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que les directions (du, dv) et $(\delta u, \delta v)$ soient conjuguées. Notre raisonnement ne suppose nullement que les coordonnées x, y, z soient rectangulaires. Nous pourrons donc obtenir en axes obliques l'équation différentielle des lignes asymptotiques, en exprimant que la direction (du, dv) de chacune d'elles est sa propre conjuguée. La condition (23) doit alors être vérifiée par $\delta u = du$, $\delta v = dv$, ce qui nous donne d'une autre manière encore l'équation

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''dv^2 = 0.$$

10. Ce qui précède fournit un moyen simple de reconnaître si les lignes coordonnées $u =$ const. et $v =$ const. forment un réseau conjugué. En effet, la condition générale (23) devant être vérifiée par $du = 0$ et $\delta v = 0$, il reste $D' = 0$. Ainsi, *la condition nécessaire et suffisante pour que le réseau* (u, v) *soit conjugué est*

$$D' = \begin{vmatrix} x''_{uv} & x'_u & x'_v \\ y''_{uv} & y'_u & y'_v \\ z''_{uv} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} = 0,$$

résultat important qui nous servira dans la suite.

En voici une démonstration directe. Soit (C) l'une des courbes coordonnées $u =$ const. En chacun de ses points la direction conjuguée de sa tangente est, par hypothèse, la tangente à la courbe coordonnée $v =$ const. qui passe en ce point. Cette tangente, qui a pour équation

$$\frac{X - x}{x'_u} = \frac{Y - y}{y'_u} = \frac{Z - z}{z'_u}, \tag{24}$$

doit engendrer une développable. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que le réseau (u, v) soit conjugué. En exprimant que la droite (24) engendre une développable, au moyen de l'équation générale trouvée dans la théorie des enveloppes (Ch. III, n° **12**), on trouve précisément ici $D' = 0$.

De là résulte une conséquence importante. Le déterminant D' étant nul, il existe, comme on sait, une même relation linéaire et

homogène entre les éléments de ses trois colonnes. En d'autres termes, *pour que les courbes coordonnées* $u =$ const., $v =$ const. *forment un réseau conjugué, il faut et il suffit que les trois coordonnées* x, y, z *de cette surface, considérées comme fonctions de* u *et de* v, *soient trois solutions d'une équation aux dérivées partielles du second ordre*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \mathrm{A}(u, v) \frac{\partial \theta}{\partial u} + \mathrm{B}(u, v) \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Cette proposition permet de définir des surfaces sur lesquelles les courbes coordonnées forment un réseau conjugué. Nous donnerons comme exemple celles que fournit l'équation $\theta''_{uv} = 0$. Par deux intégrations successives on déduit de cette équation

$$\theta'_u = \mathrm{U}', \qquad \theta = \mathrm{U} + \mathrm{V},$$

en désignant par U et V deux fonctions arbitraires l'une de u, l'autre de v. Si donc nous posons

$$x = \mathrm{U}_1 + \mathrm{V}_1, \qquad y = \mathrm{U}_2 + \mathrm{V}_2, \qquad z = \mathrm{U}_3 + \mathrm{V}_3,$$

les U représentant des fonctions quelconques de u, et les V de v, nous aurons une classe de surfaces sur lesquelles les courbes coordonnées $u =$ const., $v =$ const. formeront un réseau conjugué. Ces surfaces ont reçu le nom de *surfaces de translation*, à raison de la propriété suivante. Chacune d'elles est engendrée par une courbe de forme invariable

$$x_1 = \mathrm{U}_1, \qquad y_1 = \mathrm{U}_2, \qquad z_1 = \mathrm{U}_3,$$

qui se déplace parallèlement à elle-même, de telle façon que l'un de ses points décrive la courbe fixe qui a pour équations

$$x_2 = \mathrm{V}_1, \qquad y_2 = \mathrm{V}_2, \qquad z_2 = \mathrm{U}_3.$$

On peut considérer aussi ces surfaces comme le lieu des milieux des cordes qui joignent un point quelconque de la courbe

$$x_3 = 2\mathrm{U}_1, \qquad y_3 = 2\mathrm{U}_2, \qquad z_3 = 2\mathrm{U}_3,$$

à un point quelconque de la courbe

$$x_4 = 2\mathrm{V}_1, \qquad y_4 = 2\mathrm{V}_2, \qquad z_4 = 2\mathrm{V}_3.$$

Remarque I. — Quand une surface est rapportée à un réseau conjugué, l'équation différentielle de ses lignes asymptotiques ne contient pas de terme en $du\,dv$, et réciproquement. Ainsi l'équation différentielle du n° 8 ne contient pas de terme en $du\,dv$, parce que le réseau $x = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ est un réseau conjugué, limite de celui qui a été défini au Chapitre VIII (n° 3).

Remarque II. — La propriété des lignes de courbure de former le seul réseau conjugué orthogonal qui existe sur une surface (Ch. VIII, n° 9) se vérifie aisément au moyen des équations établies dans le présent Chapitre. En effet, si le réseau $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ est orthogonal, on aura $F = 0$; si de plus il est conjugué, on aura $D' = 0$. Mais, dans cette double hypothèse, l'équation (11) des lignes de courbure se réduit à $du\,dv = 0$, ce qui prouve que ces lignes se confondent avec les courbes coordonnées.

A cette propriété, qui joue un grand rôle dans la théorie des lignes de courbure, nous rattacherons d'abord le théorème de Dupin, puis la détermination des surfaces de Joachimsthal.

V. — Théorème de Dupin et applications.

11. *Définition.* — Trois familles de surfaces dont les équations renferment chacune un paramètre variable

$$(25) \qquad f(x, y, z) = u, \qquad \varphi(x, y, z) = v, \qquad \psi(x, y, z) = w,$$

sont dites former *un système triple orthogonal,* si deux quelconques de ces surfaces, prises dans deux familles différentes, se coupent à angle droit, c'est-à-dire ont leurs plans tangents rectangulaires, tout le long d'une courbe commune.

Cette propriété peut s'énoncer ainsi : les plans tangents aux trois surfaces, une de chaque famille, qui passent en un point quelconque de l'espace, forment un trièdre trirectangle; ou encore : les tangentes aux intersections mutuelles des trois surfaces sont rectangulaires deux à deux.

A titre d'exemple, considérons : 1° la famille des plans qui passent par une droite; 2° la famille des cônes qui sont de révolution autour de cette droite et qui ont leurs sommets au même

point; 3° la famille des sphères qui ont ce point pour centre. Il est bien connu que deux de ces surfaces, appartenant à deux familles différentes, se coupent à angle droit en tous leurs points d'intersection. Les trois familles considérées forment donc un système triple orthogonal, qui est le système des *coordonnées polaires* de l'espace.

En second lieu, considérons encore : 1° la famille des plans qui passent par une droite ; 2° la famille des cylindres qui sont de révolution autour de cette droite; 3° la famille des plans qui lui sont perpendiculaires. Ces trois familles de surfaces forment un autre système triple orthogonal, qui est le système des *coordonnées semi-polaires* ou *cylindriques*.

Enfin, il est à peine besoin de rappeler le système des *coordonnées cartésiennes rectangulaires*.

Théorème. — *Toute surface fait partie d'un système triple orthogonal.*

Considérons une surface quelconque (S); en chaque point $M(x, y, z)$ de cette surface, portons sur sa normale, toujours du même côté du plan tangent, un segment MM_1 de longueur constante l. La surface (S_1), lieu des points M_1 ainsi obtenus, est dite *parallèle* à la surface (S) : on exprime par là que les plans tangents aux deux surfaces aux points correspondants M et M_1 sont parallèles. Cette propriété résulte immédiatement d'un fait général facile à vérifier :

Si un segment rectiligne, dont les extrémités M *et* M_1 *décrivent deux courbes* (C) *et* (C_1), *reste perpendiculaire à* (C) *et conserve une longueur invariable, il reste aussi perpendiculaire à* (C_1); réciproquement, *s'il reste perpendiculaire à* (C) *et à* (C_1), *sa longueur demeure constante.*

Aux diverses longueurs l qu'on peut porter sur les normales à la surface (S) correspondent une famille de surfaces, parallèles à (S) et dont celle-ci fait évidemment partie.

Considérons maintenant les lignes de courbure de la surface (S). D'après la définition de ces lignes, les normales menées le long de chacune d'elles forment une développable (*normalie développable*) dont toutes les génératrices sont visiblement normales à

toutes les surfaces parallèles à (S). Or les deux systèmes de lignes de courbure de (S) donnent lieu à deux familles de normalies développables. Je dis que deux quelconques de ces développables, (Σ) et (Σ'), appartenant à deux familles différentes, se coupent à angle droit tout le long d'une génératrice commune. Soient, en effet, (C) et (C′) les deux lignes de courbure de (S) qui déterminent les normalies (Σ) et (Σ'); elles se coupent en un point M; la normale à (S) en M appartient aux deux développables (Σ) et (Σ'), et leurs plans tangents, étant rectangulaires en M, le sont tout le long de cette normale. Il est établi par là que *les surfaces parallèles à une surface donnée et ses deux familles de normalies développables forment un système triple orthogonal.*

Remarque. — Les normalies développables des deux familles coupent toutes les surfaces parallèles à (S) suivant leurs lignes de courbure; et elles se coupent mutuellement suivant des génératrices, qui sont des lignes de courbure pour chacune d'elles. On vérifie immédiatement sur les exemples antérieurs cette propriété des surfaces d'un système triple orthogonal, de se couper deux à deux suivant leurs lignes de courbure. C'est cette propriété que nous allons généraliser.

12. Théorème de Dupin. — *Les surfaces d'un système triple orthogonal se coupent suivant leurs lignes de courbure.*

Exprimons l'orthogonalité des surfaces considérées en supposant x, y, z tirés des équations (25)

$$x = \xi(u, v, w), \qquad y = \eta(u, v, w), \qquad z = \zeta(u, v, w).$$

Ces formules, quand on y donne à deux des paramètres des valeurs constantes, par exemple $u = u_0$, $v = v_0$, représentent la courbe d'intersection des deux surfaces $f = u_0$, $\varphi = v_0$; le long de cette courbe w varie seul. Les coefficients directeurs de la tangente à cette courbe sont donc x'_w, y'_w, z'_w. De la même manière les tangentes aux intersections d'une surface $v = v_0$ avec une surface $w = w_0$, et de celle-ci avec une surface u_0 ont pour coefficients directeurs, l'une x'_u, y'_u, z'_u, l'autre x'_v, y'_v, z'_v.

On aura donc les trois conditions d'orthogonalité

$$(26) \qquad \Sigma x'_w x'_u = 0, \qquad \Sigma x'_u x'_v = 0, \qquad \Sigma x'_v x'_w = 0,$$

où les sommations s'étendent aux trois coordonnées. Comme les valeurs u_0, v_0, w_0 sont absolument quelconques, ce sont là trois identités, qui ont lieu quelles que soient les valeurs attribuées à u, v, w. En conséquence, nous pourrons différentier ces équations par rapport à l'un quelconque de ces trois paramètres ; et, si nous prouvons que les lignes $u =$ const. et les lignes $v =$ const., tracées sur toute surface $w = w_0$, forment un réseau conjugué, nous aurons établi le théorème annoncé, puisque chaque surface d'une famille sera coupée suivant des courbes orthogonales et conjuguées, c'est-à-dire suivant ses lignes de courbure, par les surfaces des deux autres familles.

Or, pour que le réseau (u, v) des lignes coordonnées soit conjugué sur toute surface $w = w_0$, il faut et il suffit (n° **10**) qu'on ait identiquement

$$D' = \begin{vmatrix} x''_{uv} & x'_u & x'_v \\ y''_{uv} & y'_u & y'_v \\ z''_{uv} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} = 0.$$

Différentions les équations (26) respectivement par rapport à v, w et u. Il viendra

$$\Sigma(x'_w x''_{uv} + x'_u x''_{vw}) = 0, \quad \Sigma(x'_u x''_{vw} + x'_v x''_{uw}) = 0, \quad \Sigma(x'_v x''_{uw} + x'_w x''_{uv}) = 0.$$

Ajoutons les deux sommes extrêmes et retranchons la somme intermédiaire ; nous trouvons

$$\Sigma x'_w x''_{uv} = 0.$$

Cette identité, rapprochée des deux identités extrêmes (26), entraîne, par élimination de x'_w, y'_w, z'_w, l'évanouissement du déterminant D', ce qui démontre le théorème de Dupin.

D'après cette importante proposition, la connaissance d'un système triple orthogonal entraîne la connaissance des lignes de courbure d'une triple infinité de surfaces.

13 *Applications.* — Pour déterminer les lignes de courbure d'une quadrique à centre, considérons les quadriques homofocales représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0,$$

qu'il conviendrait de remplacer par les trois équations

$$(u)\qquad \frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-1=0,$$

$$(v)\qquad \frac{x^2}{a^2+v}+\frac{y^2}{b^2+v}+\frac{z^2}{c^2+v}-1=0,$$

$$(w)\qquad \frac{x^2}{a^2+w}+\frac{y^2}{b^2+w}+\frac{z^2}{c^2+w}-1=0.$$

Soit $a^2 > b^2 > c^2$. Si l'on suppose

$$u > -c^2,\qquad -c^2 > v > -b^2,\qquad -b^2 > w > -a^2,$$

les surfaces de la famille (u) sont des ellipsoïdes, les surfaces (v) des hyperboloïdes à une nappe, les surfaces (w) des hyperboloïdes à deux nappes. On sait que, par tout point de l'espace, il passe une quadrique de chaque famille. Ces quadriques sont d'ailleurs orthogonales en tous leurs points communs; car il suffit de retrancher, par exemple, les équations (u) et (v) pour trouver la relation

$$\sum \frac{x}{a^2+u}\,\frac{x}{a^2+v}=0,$$

qui exprime que les normales aux deux quadriques (u) et (v), sont rectangulaires. En conséquence, *toute quadrique à centre est coupée suivant ses lignes de courbure par les quadriques homofocales des deux familles autres que la sienne.*

Pour avoir les lignes de courbure des paraboloïdes, considérons les paraboloïdes homofocaux représentés par l'équation

$$\frac{y^2}{p+\lambda}+\frac{z^2}{q+\lambda}-2x-\lambda=0.$$

Soit $p > q$; pour $\lambda = u > -q$, on a une famille de paraboloïdes elliptiques qui tournent leur concavité vers les x positifs; pour $\lambda = v$, compris entre $-q$ et $-p$, des paraboloïdes hyperboliques; pour $\lambda = w < -p$, des paraboloïdes elliptiques tournant leur concavité vers les x négatifs. On vérifie comme précédemment que deux surfaces de famille différente se coupent partout à angle droit. Il en résulte que *tout paraboloïde est coupé suivant ses lignes de courbure par les paraboloïdes homofocaux des deux familles autres que la sienne.*

Comme autre exemple, reprenons les trois familles de surfaces

$$(\Sigma) \qquad \frac{xy}{z} = \text{const.}, \qquad \sqrt{x^2+z^2} \pm \sqrt{y^2+z^2} = \text{const.}$$

déjà considérées au Chapitre VIII (n° 12). Nous savons que toute surface de la première famille est coupée suivant ses lignes de courbure par les surfaces des deux autres familles. On vérifie aisément que deux surfaces de famille différente se coupent partout à angle droit. En conséquence, les surfaces (Σ) forment un système triple orthogonal et se coupent deux à deux suivant leurs lignes de courbure.

14. Le théorème de Dupin a des conséquences d'une nature un peu différente. C'est ainsi qu'il permet, étant donnée une surface dont on connaît les lignes de courbure, d'en déduire une infinité d'autres dont les lignes de courbure seront connues d'avance, grâce à la proposition suivante :

Théorème. — *Toute transformation qui conserve les angles conserve les lignes de courbure.*

On dit qu'une transformation géométrique conserve les angles, ou qu'elle est *isogonale,* quand, à tout angle d'une figure, elle fait correspondre un angle égal dans la figure transformée. Tel est le cas du déplacement dans l'espace, de la symétrie, de la similitude, de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Nous allons prouver que, *dans toute transformation isogonale, la transformée d'une surface a pour lignes de courbure les transformées des lignes de courbure de cette surface.* Associons, en effet, à la surface proposée (S) toutes les surfaces qui lui sont parallèles et ses deux familles de normalies développables. Au système triple orthogonal ainsi constitué (n° 11) toute transformation isogonale fait correspondre un autre système triple orthogonal, puisqu'elle n'altère pas les angles. En vertu du théorème de Dupin, la transformée de la surface (S) sera coupée suivant ses lignes de courbure par les transformées des deux familles de normalies développables. Ces lignes sont donc connues.

VI. — Surfaces de Joachimsthal.

15. Proposons-nous de déterminer toutes les surfaces admettant pour lignes de courbure d'un système des courbes planes dont les plans passent par une droite fixe. Nous ferons usage, à cet effet, d'un système de coordonnées curvilignes qui peut servir dans d'autres cas, et qui dérive d'une proposition établie antérieurement (Chap. VIII, n° 3) : *Les sections faites dans une surface par des plans contenant une droite fixe et les courbes de contact des cônes circonscrits ayant leurs sommets sur cette droite forment un réseau conjugué.* Pour rapporter une surface aux courbes d'un tel réseau, il suffit de la considérer comme l'enveloppe des cônes circonscrits

$$\frac{z - v}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}, v\right),$$

qui ont leurs sommets sur l'axe Oz. Posons

$$\frac{y}{x} = u, \qquad \frac{z - v}{x} = \varphi(u, v);$$

la surface sera définie par ces deux équations, jointes à l'équation dérivée

$$-\frac{1}{x} = \varphi'_v.$$

On a donc, en résolvant ce système,

$$(27) \qquad x = \frac{-1}{\varphi'_v}, \qquad y = \frac{-u}{\varphi'_v}, \qquad z = v - \frac{\varphi}{\varphi'_v}.$$

Pour caractériser les surfaces cherchées, il nous suffira d'exprimer que le réseau conjugué (u, v) est orthogonal, puisque le seul réseau conjugué orthogonal qui existe sur une surface est formé de ses lignes de courbure. Posant comme toujours

$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v,$$

nous trouvons ici

$$\varphi'^4_v F = [(1 + u^2 + \varphi^2)\varphi''_{uv} - (u + \varphi\varphi'_u)\varphi'_v]\varphi''_{v^2}.$$



Nous devons égaler F à zéro. Il n'y a pas lieu d'admettre la solution $\varphi''_{v^2} = 0$, car φ étant alors une fonction linéaire de v, les formules (27) donnent, pour x, y et z, trois fonctions de la seule variable u; la surface se réduirait à une courbe. Soit donc

$$\frac{\varphi''_{uv}}{\varphi'_v} = \frac{u + \varphi\varphi'_u}{1 + u^2 + \varphi^2}.$$

Les deux membres de cette équation étant des dérivées logarithmiques, on en tire successivement

$$V'^2(1 + u^2 + \varphi^2) = \varphi'^2_v, \qquad V = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + u^2 + \varphi^2}},$$

en désignant par V une fonction arbitraire de v. Effectuons la quadrature indiquée, ce qui introduit une fonction arbitraire U de u; nous aurons

$$(28) \qquad \varphi = \sqrt{1 + u^2}\, \frac{e^{V-U} - e^{U-V}}{2}.$$

Soient Shω et Chω (Ch. III, n° 4) les *sinus* et *cosinus hyperboliques* de ω. A cause de la relation (28), les formules (27) deviennent

$$(29) \qquad x = \frac{y}{u} = \frac{-1}{\sqrt{1 + u^2}\, V' \operatorname{Ch}(V - U)}, \qquad z = v - \frac{\operatorname{Sh}(V - U)}{V' \operatorname{Ch}(V - U)}.$$

Les surfaces de Joachimsthal sont ainsi déterminées. On voit que leurs lignes de courbure du second système ($v =$ const.) sont tracées sur des sphères

$$x^2 + y^2 + (z - v)^2 = \frac{1}{V'^2}.$$

Si l'on pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, une ligne de courbure $u =$ const. sera définie, dans son plan, par les deux équations

$$(30) \qquad r = \frac{1}{V' \operatorname{Ch}(V - U)}, \qquad z = v - r \operatorname{Sh}(V - U),$$

qui représentent, quand u varie ainsi que v, tous les points du plan zOr. Les lignes $v =$ const. constituent l'ensemble des cercles qui ont leurs centres sur Oz,

$$r^2 + (z - v)^2 = \frac{1}{V'^2},$$



puisque la fonction V reste arbitraire. Les lignes $u =$ const. sont leurs trajectoires orthogonales : en effet, le coefficient angulaire de la normale à l'un des cercles considérés est

$$\frac{z - v}{r} = -\operatorname{Sh}(V - U),$$

et celui de la tangente à la courbe $u =$ const., qui a pour valeur

$$\frac{z'_v}{r'_v} = \frac{1 - rV'\operatorname{Ch}(V - U) - r'_v\operatorname{Sh}(V - U)}{r'_v},$$

est égal au précédent, en vertu des formules (30).

Cela posé, les équations (29) représentent toutes les courbes (30), amenées par rotation autour de Oz dans les divers plans $y = ux$. Or, on peut considérer U comme un paramètre variable; alors u devient une fonction arbitraire de U; d'où la génération suivante des surfaces de Joachimsthal :

Dans un plan zOx, on considère une famille quelconque de cercles ayant leurs centres sur Oz, ainsi que leurs trajectoires orthogonales. On fait tourner chacune de ces trajectoires autour de Oz, d'un angle qui varie d'après une loi arbitrairement choisie, quand on passe de l'une à l'autre; le lieu de ces diverses courbes ainsi déplacées est une surface de Joachimsthal.

Ce résultat serait facile à déduire, par un raisonnement géométrique, de la proposition qui nous a servi de point de départ. Mais notre méthode nous a donné, de plus, l'expression analytique des coordonnées des surfaces cherchées. Remarquons aussi qu'en obtenant les formules (30), nous avons retrouvé la solution de ce problème : *Déterminer dans le plan les trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de cercles ayant leurs centres en ligne droite,* que nous avions traité précédemment (Chap. III, n° 4).

CHAPITRE X.

ÉTUDE DES SURFACES RÉGLÉES.

I. — Paramètre de distribution et point central.

1. Une droite dont les équations dépendent d'un paramètre engendre une *surface réglée,* qui est dite *développable,* si la droite reste tangente à une courbe, *gauche* dans le cas contraire (Ch. III, n° 13). La génératrice étant représentée par les deux équations

$$(1) \qquad x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

nous avons vu (Ch. III, n° 12) que les surfaces développables sont caractérisées par la relation

$$(2) \qquad a'q' - b'p' = 0,$$

où les accents indiquent les dérivées prises par rapport au paramètre, et que la valeur commune des rapports égaux

$$(3) \qquad -\frac{p'}{a'} = -\frac{q'}{b'} = z$$

détermine le z du point où la génératrice est tangente à l'arête de rebroussement de la surface.

2. Cherchons la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines (D) et (D_1), répondant aux valeurs v et $v + \Delta v$ du paramètre. Si l'on prend la première pour axe des z, en faisant $a = b = p = q = 0$, la génératrice (D_1) sera représentée par les équations

$$(1)' \qquad x = z\Delta a + \Delta p, \qquad y = z\Delta b + \Delta q.$$

Leur plus courte distance se projette sur le plan des xy, qui est perpendiculaire à l'une d'elles, suivant la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la projection de (D_1)

$$(4) \qquad x\,\Delta b - y\,\Delta a + \Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p = 0.$$

Elle a donc pour longueur

$$(5) \qquad \delta = \pm \frac{\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p}{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}} = \pm \frac{a'q' - b'p'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}\,\Delta v + \ldots.$$

Ce calcul, où nous avons négligé les infiniment petits d'ordre supérieur, prouve que, pour les surfaces gauches, δ est du premier ordre, et, pour les développables, d'un ordre plus élevé. En effet, nous avons démontré (Ch. V, n° 14, 4°) que δ est en général du troisième ordre dans les développables.

L'angle φ des deux génératrices infiniment voisines est du premier ordre. En effet, les cosinus directeurs de Oz sont 0,0 et 1; ceux de (D_1) sont proportionnels à Δa, Δb et 1. On a donc

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1 + (\Delta a)^2 + (\Delta b)^2} = 1 - (a'^2 + b'^2)(\Delta v)^2,$$

en négligeant les puissances supérieures de Δv. De là résulte

$$\sin\varphi = \sqrt{a'^2 + b'^2}\,\Delta v.$$

Ainsi l'angle φ est bien du premier ordre. On voit que *pour les surfaces gauches le rapport de la distance de deux génératrices infiniment voisines à l'angle qu'elles font entre elles tend vers une limite finie*. Cette limite est ce qu'on appelle le *paramètre de distribution*. C'est une longueur k, bien déterminée pour chaque génératrice, variable d'une génératrice à l'autre :

$$k = \lim \frac{\delta}{\varphi} = \lim \frac{\delta}{\sin\varphi} = \pm \frac{a'q' - b'p'}{a'^2 + b'^2}.$$

D'après sa définition, le paramètre k est constamment nul dans les développables. Nous nous occuperons un peu plus loin (n° 9) du signe qu'il convient de lui attribuer. (Certains auteurs appellent *paramètre de distribution* l'inverse de k.)

3. Théorème. — *La perpendiculaire commune à deux génératrices d'une surface réglée tend vers une position limite, quand l'une d'elles tend vers l'autre.*

En effet, la perpendiculaire commune à Oz et à (D_1) est située dans le plan mené par Oz perpendiculairement à la droite (4); ce plan, ayant pour équation

$$\frac{y}{x} = -\frac{\Delta a}{\Delta b}, \tag{6}$$

fait, à la limite, avec le plan zOx un angle θ_0 dont la tangente est bien déterminée

$$\operatorname{tang}\theta_0 = -\frac{a'}{b'}. \tag{7}$$

De plus, nous connaîtrons la distance z_0 du plan xOy à la perpendiculaire commune en calculant le z du point où le plan (6) rencontre la droite (D_1). Or les équations (1)′ et (6) donnent

$$\frac{y}{x} = \frac{z\Delta b + \Delta q}{z\Delta a + \Delta p} = -\frac{\Delta a}{\Delta b}, \qquad z = -\frac{\Delta a\,\Delta p + \Delta b\,\Delta q}{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2};$$

d'où, en passant à la limite, on déduit

$$z_0 = -\frac{a'p' + b'q'}{a'^2 + b'^2}. \tag{8}$$

Ainsi la perpendiculaire commune à une génératrice et à la génératrice infiniment voisine a une position limite. Le point où elle rencontre alors la génératrice considérée est appelé le *point central* de cette génératrice. La courbe lieu des points centraux est la *ligne de striction* de la surface.

Remarque. — Pour les développables, la ligne de striction se confond avec l'arête de rebroussement. En effet, la formule (8) donne pour z_0 la valeur (3) quand on y introduit l'hypothèse

$$a'q' - b'p' = 0,$$

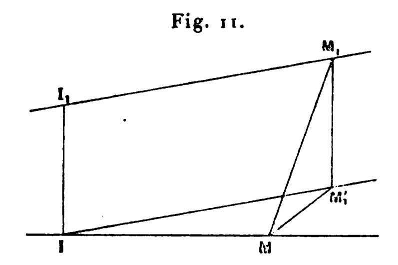
caractéristique des surfaces développables. Cette remarque nous servira dans diverses circonstances.

II. — Plan tangent aux surfaces gauches; raccordement.

4. Les plans tangents aux divers points d'une génératrice peuvent être déterminés par l'angle qu'ils font avec le plan tangent au point central, ou *plan central*. A cet effet, figurons deux génératrices voisines IM, I_1M_1, leur plus courte distance II_1 et la parallèle IM'_1 à I_1M_1. La position limite du plan I_1IM sera le plan central de IM, puisque I_1I deviendra une tangente à la surface.

Par le point M, situé à une distance ρ' de I, menons un plan perpendiculaire à IM; ce plan coupe I_1M_1 en M_1, IM'_1 en M'_1 et détermine dans la surface une section dont MM_1 est une corde. La position limite du plan IMM_1 est le plan tangent en M.

Fig. 11.



L'angle θ' des deux plans I_1IM et IMM_1 est l'angle de MM_1 avec la parallèle menée en M à II_1 ou bien avec $M_1M'_1$. Dès lors les deux triangles MM'_1M_1, IMM'_1, rectangles, l'un en M'_1, l'autre en M, donnent

$$\tang\theta' = \frac{MM'_1}{M_1M'_1} = \frac{\rho'\tang\varphi}{M_1M'_1} = \frac{\rho'\tang\varphi}{\delta},$$

φ étant l'angle et δ la distance des deux génératrices IM, I_1M_1. A la limite, θ et ρ étant ce que deviennent θ' et ρ', nous trouvons, en désignant toujours par k le paramètre de distribution,

$$(9) \qquad \tang\theta = \rho \lim\frac{\varphi}{\delta} = \frac{\rho}{k}.$$

Donc *la tangente de l'angle compris entre un plan tangent quelconque et le plan central est proportionnelle à la distance de son point de contact au point central.*

Dans les développables, le paramètre k étant nul, le plan tangent est toujours perpendiculaire au plan central; il est donc le même, ainsi que nous le savions déjà (Ch. III, n° 19), tout le long d'une génératrice.

Dans les surfaces gauches, quand le point de contact parcourt une génératrice d'une extrémité à l'autre, le plan tangent tourne de 180 degrés. Aux deux extrémités de la génératrice, il est perpendiculaire au plan central.

Il résulte de cette loi de variation du plan tangent que *les normales menées à une surface gauche en tous les points d'une de ses génératrices forment un paraboloïde équilatère dont un plan directeur est perpendiculaire à cette génératrice*. En effet, si l'on prend pour axe des z la génératrice, pour origine son point central, pour plan des zx le plan central, la formule (9) donne, pour le lieu des normales considérées, l'équation

$$-\frac{x}{y} = \frac{z}{k},$$

ce qui démontre la proposition.

5. Quand deux surfaces gauches ont une génératrice commune, on dit qu'il y a *raccordement* entre ces surfaces aux points de la génératrice commune où elles ont même plan tangent. Considérons deux surfaces telles, (S) et (S_1), dont les points centraux soient O et O_1, distants d'une longueur h. Soient de plus k, k_1 les deux paramètres de distribution, et V l'angle des deux plans centraux. En un point M de la génératrice commune, le plan tangent à (S) fait avec le plan central correspondant l'angle θ donné par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\rho}{k},$$

où ρ désigne la longueur OM. Pour la surface (S_1) le plan tangent en M fait avec le plan central un angle θ_1, et l'on a

$$\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{\rho - h}{k_1}.$$

La condition pour que les deux surfaces se raccordent en M est

$$\theta_1 = \theta - V.$$

Éliminant θ et θ_1 entre les trois relations précédentes, on obtient l'équation du second degré

$$(10)\qquad \rho^2 \operatorname{tang} V + \rho(k - k_1 - h \operatorname{tang} V) + k(k_1 \operatorname{tang} V - h) = 0.$$

Donc *deux surfaces gauches qui ont une génératrice commune se raccordent en deux points de cette génératrice.* S'il y a raccordement en plus de deux points, l'équation (10) est une identité; les deux surfaces se raccordent alors *tout le long de la génératrice commune,* moyennant les conditions

$$\operatorname{tang} V = 0, \qquad k_1 = k, \qquad h = 0,$$

qui expriment que les deux surfaces ont même point central, même plan central et même paramètre de distribution pour la génératrice considérée.

Dans le cas particulier des surfaces à plan directeur, toutes les génératrices étant parallèles à ce plan, leurs perpendiculaires communes et, par suite, tous les plans centraux, sont perpendiculaires au plan directeur. Si donc deux surfaces ont même plan directeur et admettent une génératrice commune, l'angle V étant nul, ces surfaces se raccordent en un point seulement de cette génératrice. S'il y a raccordement en plus d'un point, elles se raccordent tout le long de la génératrice commune.

Ce qui précède permet, quand une surface est engendrée par une droite s'appuyant sur trois directrices auxquelles on sait mener les tangentes, de construire le plan tangent en un quelconque de ses points, en lui substituant une quadrique qui se raccorde avec elle tout le long de la génératrice (D) du point considéré. Soient en effet (T_1), (T_2) et (T_3) les tangentes menées aux trois directrices aux points M_1, M_2, M_3 où elles rencontrent (D). La quadrique engendrée par une droite qui s'appuie sur (T_1), (T_2) et (T_3) contient (D) et se raccorde avec la surface proposée en M_1, M_2 et M_3, et, par suite, tout le long de (D).

Si la surface est à plan directeur et définie par deux directrices, (T_1) et (T_2) étant les tangentes à ces directrices, on prendra pour surface de raccordement le paraboloïde engendré par une droite qui s'appuie sur les deux droites (T_1) et (T_2) en restant parallèle au plan directeur.

III. — Détermination du paramètre de distribution et du point central.

6. Pour définir de la manière la plus générale une surface réglée, considérons une courbe *directrice* (Γ). Par chaque point (ξ, η, ζ) de cette courbe, menons une droite (D) dont les cosinus directeurs soient λ, μ, ν. Tout point $M(x, y, z)$ d'une telle droite, et, par suite, de la surface réglée qu'elle engendre, est représenté par les formules

$$(11) \qquad x = \xi + \lambda u, \qquad y = \eta + \mu u, \qquad z = \zeta + \nu u,$$

où ξ, η, ζ ainsi que λ, μ, ν sont des fonctions d'un paramètre v, et u un second paramètre variable; sa valeur algébrique mesure le segment qu'il faut porter sur la génératrice (D) à partir du point (ξ, η, ζ) dans la direction (λ, μ, ν) pour obtenir le point M.

Soient $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ les cosinus directeurs d'une autre génératrice (D_1) et φ l'angle que font (D) et (D_1). On a, comme on sait,

$$(12) \qquad \sin^2\varphi = (\mu\nu_1 - \nu\mu_1)^2 + (\nu\lambda_1 - \lambda\nu_1)^2 + (\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2.$$

Quand (D_1) tend vers (D), φ tend vers zéro, et, par une transformation qui nous a déjà servi (Ch. IV, n° 5), on trouve

$$(13) \qquad \lim \frac{\sin^2\varphi}{dv^2} = \frac{d\varphi^2}{dv^2} = \frac{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2}{dv^2},$$

ce qui montre que $d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2$ est la partie principale de $\sin^2\varphi$.

Cela posé, si (ξ_1, η_1, ζ_1) est le point où la génératrice (D_1) rencontre (Γ), la plus courte distance δ de (D) et de (D_1) a pour carré

$$(14) \qquad \delta^2 = \Sigma(\xi + \lambda u - \xi_1 - \lambda_1 u_1)^2,$$

les paramètres u et u_1 étant déterminés par les deux équations

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\delta^2}{\partial u} = \Sigma\lambda\ (\xi - \xi_1 + \lambda u - \lambda_1 u_1) = 0, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\delta^2}{\partial u_1} = \Sigma\lambda_1(\xi - \xi_1 + \lambda u - \lambda_1 u_1) = 0, \end{cases}$$

conformément à la théorie générale des maxima et minima.

Pour tirer de ces équations le rapport $\delta : \sin\varphi$, nous poserons

$$(16)\qquad \begin{cases} l = \xi - \xi_1 + \lambda u - \lambda_1 u_1, \\ m = \eta - \eta_1 + \mu u - \mu_1 u_1, \\ n = \zeta - \zeta_1 + \nu u - \nu_1 u_1, \end{cases}$$

ce qui nous permettra d'écrire

$$(14)'\qquad \delta^2 = l^2 + m^2 + n^2,$$

$$(15)'\qquad \begin{cases} 0 = \lambda l + \mu m + \nu n, \\ 0 = \lambda_1 l + \mu_1 m + \nu_1 n. \end{cases}$$

De ces relations et des équations (16) on conclut

$$(17)\qquad \delta^2 = l(\xi - \xi_1) + m(\eta - \eta_1) + n(\zeta - \zeta_1).$$

Or la résolution du système $(15)'$ donne

$$\frac{l}{\mu\nu_1 - \nu\mu_1} = \frac{m}{\nu\lambda_1 - \lambda\nu_1} = \frac{n}{\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1} = \frac{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{\sqrt{\Sigma(\mu\nu_1 - \nu\mu_1)^2}}.$$

La valeur commune de ces rapports est, en vertu des formules $(14)'$ et (12), égale à $\delta : \sin\varphi$. On a donc

$$l = \frac{(\mu\nu_1 - \nu\mu_1)\,\delta}{\sin\varphi}, \qquad m = \frac{(\nu\lambda_1 - \lambda\nu_1)\,\delta}{\sin\varphi}, \qquad n = \frac{(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)\,\delta}{\sin\varphi}.$$

Substituant ces valeurs dans la relation (17), nous trouvons

$$\frac{\delta}{\sin\varphi} = \begin{vmatrix} \xi - \xi_1 & \lambda & \lambda_1 \\ \eta - \eta_1 & \mu & \mu_1 \\ \zeta - \zeta_1 & \nu & \nu_1 \end{vmatrix} : \sin^2\varphi.$$

Faisons maintenant tendre (D_1) vers (D), en tenant compte de la relation (13). Nous arriverons à l'expression cherchée du paramètre de distribution

$$(18)\qquad k = \begin{vmatrix} d\xi & d\lambda & \lambda \\ d\eta & d\mu & \mu \\ d\zeta & d\nu & \nu \end{vmatrix} : (d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2).$$

Le numérateur de k est le déterminant qui, égalé à zéro, exprime (Ch. III, n° 12) que la surface est une développable.

7. Proposons-nous de déterminer le point central de la génératrice (D). La valeur h, qu'il faut attribuer à u pour obtenir ce point, est la valeur limite que le système (15) assigne à l'inconnue u quand on fait tendre (D_1) vers (D). Pour la trouver, posons

$$u_1 = u + \Delta u, \qquad \xi_1 = \xi + \Delta\xi, \qquad \ldots, \qquad \lambda_1 = \lambda + \Delta\lambda, \qquad \ldots.$$

Comme l'angle φ des deux génératrices a pour cosinus

$$\cos\varphi = \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1,$$

les équations (15) pourront être écrites ainsi

$$(15)'' \qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma\lambda\,\Delta\xi + \cos\varphi\,\Delta u - u(1 - \cos\varphi) &= 0, \\ \Sigma\lambda\,\Delta\xi + \Sigma\,\Delta\lambda\,\Delta\xi + \Delta u + u(1 - \cos\varphi) &= 0. \end{aligned} \right.$$

En les résolvant par rapport à u, on trouve

$$u \sin^2\varphi = -\cos\varphi\,\Sigma\Delta\lambda\,\Delta\xi + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,\Sigma\lambda\,\Delta\xi.$$

Divisons les deux membres par $\sin^2\varphi$ et faisons tendre Δv, et par suite φ, vers zéro; le dernier groupe du second membre s'évanouit avec $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$; et, eu égard à la relation (13), il vient

$$(19) \qquad h = -\frac{d\lambda\,d\xi + d\mu\,d\eta + d\nu\,d\zeta}{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2}.$$

Cette formule est identique à la formule (14) du Chapitre III, qui détermine l'arête de rebroussement d'une développable. En effet, la ligne de striction d'une développable se confond (n° 3) avec son arête de rebroussement.

D'après ce qui précède, l'équation

$$(20) \qquad d\lambda\,d\xi + d\mu\,d\eta + d\nu\,d\zeta = 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe directrice (Γ) se confonde avec la ligne de striction.

Remarque. — Pour les surfaces à plan directeur, la perpendiculaire commune à deux génératrices étant perpendiculaire à ce plan, en tout point de la ligne de striction le plan tangent est perpendiculaire au plan directeur. Par suite, *la ligne de striction*

est la courbe de contact du cylindre circonscrit dont les génératrices sont perpendiculaires au plan directeur. Elle se projette sur ce plan suivant l'enveloppe des projections des génératrices. D'après ces résultats, qu'on déduirait aisément de la formule (19), *un paraboloïde hyperbolique a deux lignes de striction, qui sont deux paraboles; dans tout conoïde droit à plan directeur, la ligne de striction se confond avec l'axe.*

8. Pour mettre mieux en évidence les propriétés de la ligne de striction et du paramètre de distribution, nous allons transformer les expressions de h et de k. Introduisons les cosinus a, b, c des angles que la génératrice fait avec la tangente, la normale principale et la binormale de la directrice (Γ). Nous aurons

$$\lambda = a\alpha + b\alpha' + c\alpha'', \qquad \mu = a\beta + b\beta' + c\beta'', \qquad \nu = a\gamma + b\gamma' + c\gamma'',$$

en désignant par $\alpha, \ldots, \gamma''$ les cosinus des trois directions principales de (Γ). Soient σ, R et T son arc et ses rayons de courbure et de torsion. Appliquant les formules de Frenet, nous trouvons

$$(21) \qquad \frac{d\lambda}{d\sigma} = \left(\frac{da}{d\sigma} - \frac{b}{R}\right)\alpha + \left(\frac{db}{d\sigma} + \frac{a}{R} + \frac{c}{T}\right)\alpha' + \left(\frac{dc}{d\sigma} - \frac{b}{T}\right)\alpha''$$

et deux relations analogues, d'où nous concluons

$$\frac{\alpha\, d\lambda + \beta\, d\mu + \gamma\, d\nu}{d\sigma} = \frac{da}{d\sigma} - \frac{b}{R}.$$

Le numérateur du premier membre ne diffère de celui de h que par le facteur $d\sigma$. Il vient donc

$$(19)' \qquad h = \left(\frac{b}{R} - \frac{da}{d\sigma}\right)\frac{d\sigma^2}{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2},$$

et la condition pour que (Γ) soit la ligne de striction s'écrit

$$(20)' \qquad \frac{b}{R} - \frac{da}{d\sigma} = 0.$$

Donc, *si la ligne de striction coupe toutes les génératrices sous un angle constant* ($a = \text{const.}$), on a : soit $R = \infty$, ce qui exprime que *la ligne de striction est une droite;* soit $b = 0$, ce qui signifie que *la génératrice est dans le plan rectifiant de la ligne de striction.* Les deux réciproques sont évidemment vraies.

Comme exemple, cherchons les surfaces réglées dont la ligne de striction est un cercle coupant toutes les génératrices sous un angle constant. Chaque génératrice, étant dans le plan rectifiant du cercle, est perpendiculaire au rayon du point d'où elle est issue; de plus, elle fait un angle constant avec la tangente au cercle en ce point. Les surfaces cherchées sont donc des hyperboloïdes de révolution et leur ligne de striction est le cercle de gorge.

Prenons maintenant pour courbe directrice (Γ) la ligne de striction elle-même; désignons toujours son arc par σ et appelons V l'angle qu'elle fait avec la génératrice issue du point (ξ, η, ζ); nous aurons

$$\cos V\, d\sigma = \lambda\, d\xi + \mu\, d\eta + \nu\, d\zeta.$$

Élevons au carré les deux membres de la formule (18), en tenant compte de cette dernière relation et de la condition (20); nous trouverons

$$k^2 = \begin{vmatrix} d\sigma^2 & \cos V\, d\sigma & 0 \\ \cos V\, d\sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma\, d\lambda^2 \end{vmatrix} : (d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2)^2.$$

On a donc pour le carré de k cette valeur

$$k^2 = \frac{\sin^2 V\, d\sigma^2}{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2},$$

d'où, par comparaison avec la relation (13), on déduit

$$(18)' \qquad k = \sin V \frac{d\sigma}{d\varphi}.$$

Telle est l'expression du paramètre de distribution que nous voulions obtenir. Appliquons-la aux surfaces engendrées par les binormales d'une courbe gauche (Γ). La binormale étant dans le plan rectifiant et faisant avec la tangente un angle constant (droit), la courbe (Γ) est ligne de striction, ainsi que nous venons de le voir. L'angle V est donc droit; d'autre part, φ est l'angle de deux binormales; par suite k est égal au rayon de torsion T. Ainsi, *toute courbe gauche est ligne de striction de la surface engendrée par ses binormales, et le paramètre de distribution de chaque génératrice est égal au rayon de torsion de la courbe au point d'où elle est issue.*

IV. — Signe du paramètre de distribution.

9. Il n'a pas été question jusqu'ici du signe de k. Les formules (18) et (18)', à raison de la façon dont elles ont été obtenues, ne déterminent ce paramètre qu'au signe près. Voici comment on est conduit à lui en attribuer un. La loi de variation des plans tangents le long d'une génératrice est très différente, suivant qu'un observateur, traversé par cette génératrice, voit la normale tourner de gauche à droite ou de droite à gauche quand elle s'élève, c'est-à-dire quand son point d'incidence se déplace dans le sens qui va des pieds à la tête de l'observateur.

D'ailleurs, le long d'une génératrice déterminée d'une surface, les apparences resteront les mêmes, comme on s'en assure aisément, pour l'observateur, après qu'il aura été renversé de façon que le point d'incidence de la normale le traverse toujours des pieds à la tête, en parcourant la génératrice dans le sens contraire à celui de son mouvement primitif.

Quand l'observateur voit la normale *s'élever de gauche à droite,* nous dirons que l'allure de la normale est *dextrorsum* (*sinistrorsum* dans le cas contraire). Or nous avons vu (n° 4) que le paraboloïde, lieu des normales menées le long d'une génératrice Oz, le point central étant pris pour origine et le plan central pour plan des zx, a une équation de la forme

$$\frac{zy}{x} = \text{const.} = C,$$

où la constante C est, en valeur absolue, égale au paramètre de distribution. Les axes de coordonnées étant supposés avoir la disposition habituellement adoptée en Géométrie analytique (*voir* les figures de la page 113), si la constante C est négative, un observateur, traversé des pieds à la tête par la direction positive de l'axe Oz, voit la normale qui engendre le paraboloïde *s'élever de gauche à droite;* c'est le contraire qui a lieu si la constante C est positive. Dès lors il convient de donner un signe au paramètre de distribution pour distinguer les deux allures de la normale et, par suite, les deux sens de rotation du plan tangent.

Nous choisirons le signe qui résulte de la formule (18), et prenant désormais

$$(18)\qquad k = \begin{vmatrix} d\xi & d\lambda & \lambda \\ d\eta & d\mu & \mu \\ d\zeta & d\nu & \nu \end{vmatrix} : (d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2),$$

nous n'avons plus qu'à chercher quelle est l'allure des normales le long d'une génératrice, pour laquelle k est positif.

A cet effet, écrivons l'équation générale du plan tangent à une surface gauche

$$\begin{vmatrix} X - \xi - \lambda u & \xi' + \lambda' u & \lambda \\ Y - \eta - \mu u & \eta' + \mu' u & \mu \\ Z - \zeta - \nu u & \zeta' + \nu' u & \nu \end{vmatrix} = 0,$$

où les accents désignent les dérivées prises par rapport à v. Supposons que la courbe directrice (Γ) soit la ligne de striction; prenons l'un de ses points (ξ, η, ζ) pour origine, la génératrice qui en est issue pour axe des z, ce qui revient à faire $\xi = \eta = \zeta = 0$, $\lambda = \mu = 0$, $\nu = 1$; prenons pour plan des zx le plan central, ce qui entraîne $\eta' = 0$. Remarquons enfin qu'en vertu de l'identité

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$$

la dérivée ν' est nulle et que, l'expression (19) de h devant être nulle, on a aussi $\lambda' = 0$. L'équation du plan tangent se réduira à

$$\frac{Y}{X} = \frac{\mu'}{\xi'} u.$$

Or u est le z de son point de contact; par suite, l'équation du paraboloïde des normales sera

$$\frac{zy}{x} = -\frac{\xi'}{\mu'}.$$

Mais, si l'on se reporte à l'expression (18) du paramètre de distribution et qu'on y introduise les hypothèses actuelles, on trouvera simplement

$$k = \frac{\xi'}{\mu'}.$$

L'équation du paraboloïde des normales devient alors $zy = -kx$.

De là et de ce qui a été vu plus haut, nous concluons que, *pour les génératrices dont le paramètre de distribution est positif, l'allure des normales est dextrorsum* (*sinistrorsum si* $k < 0$).

Remarque I. — On peut facilement se rappeler le signe que nous choisissons pour k, en observant qu'en vertu de ce choix l'égalité énoncée à la fin du n° 8 est exacte *en grandeur et en signe*. Si, en effet, dans la formule (18) on remplace λ, μ, ν par les cosinus α'', β'', γ'' de la binormale à la courbe directrice (Γ), et qu'on applique les formules de Frenet, on trouve immédiatement

$$k = T \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = T,$$

le déterminant des neuf cosinus étant égal à l'unité (Ch. IV, n° 3). Ainsi, *chaque génératrice d'une surface de binormales a son paramètre de distribution égal au rayon de torsion de la ligne de striction au point d'où elle est issue.*

Remarque II. — Si dans la formule (18) on change les signes de ζ et de ν, le paramètre k change de signe; d'où cette conclusion : *Si deux surfaces réglées sont symétriques par rapport à un plan, les paramètres de distribution de leurs génératrices homologues sont égaux et de signes contraires.*

V. — Élément linéaire; trajectoires orthogonales des génératrices.

10. Les coordonnées d'une surface réglée étant représentées par les formules

$$x = \xi + \lambda u, \qquad y = \eta + \mu u, \qquad z = \zeta + \nu u,$$

on a immédiatement leurs différentielles

$$\begin{aligned} dx &= \lambda\, du + (\xi' + \lambda' u)\, dv, \\ dy &= \mu\, du + (\eta' + \mu' u)\, dv, \\ dz &= \nu\, du + (\zeta' + \nu' u)\, dv, \end{aligned}$$

les accents indiquant toujours des dérivées prises par rapport au paramètre v. Par suite, l'élément linéaire a pour expression

$$(22)\qquad ds^2 = du^2 + 2(\lambda\xi' + \mu\eta' + \nu\zeta')\,du\,dv + (Au^2 + 2Bu + C)\,dv^2,$$

les lettres A, B, C ayant les significations suivantes

$$A = \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2, \qquad B = \lambda'\xi' + \mu'\eta' + \nu'\zeta', \qquad C = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2.$$

En conséquence, les coefficients de l'élément linéaire ont respectivement pour valeurs

$$E = 1, \qquad F = \lambda\xi' + \mu\eta' + \nu\zeta', \qquad G = Au^2 + 2Bu + C.$$

On remarquera que G est un trinôme du second degré en u dont les coefficients sont des fonctions de v, que F dépend uniquement de v et que E se réduit à l'unité. Par suite, *les trajectoires orthogonales des génératrices de toute surface réglée sont déterminées par une quadrature.* En effet, les trajectoires des courbes $v = \text{const.}$ sur une surface quelconque dépendent, comme on sait (Ch. III, n° 6), de l'équation différentielle

$$E\,du + F\,dv = 0,$$

qui, dans le cas des surfaces réglées, a pour intégrale

$$u + \int(\lambda\xi' + \mu\eta' + \nu\zeta')\,dv = \text{const.}$$

Si donc on veut rapporter une surface réglée à ses génératrices et à leurs trajectoires orthogonales, on devra introduire, à la place de u, le premier membre t de l'équation précédente; il viendra ainsi

$$(23)\qquad ds^2 = dt^2 + (A_1t^2 + 2B_1t + C_1)\,dv^2,$$

les coefficients A_1, B_1 et C_1 ne dépendant que de v; d'ailleurs A_1 ne diffère pas de A.

On peut transformer l'expression (22) de manière à n'y laisser figurer que des éléments géométriques remarquables. Rapportons, en effet, la surface à ses génératrices et à sa ligne de striction prise pour courbe directrice (Γ); il suit de là tout d'abord que le coefficient B sera nul, en vertu de la relation (20). Si, de plus, on prend pour paramètre v l'arc σ de la ligne de striction, le coeffi-

cient F sera le cosinus de l'angle V que cette ligne fait avec les génératrices; le coefficient C sera égal à l'unité et nous pourrons écrire

$$ds^2 = (du + \cos V\, d\sigma)^2 + (A u^2 + \sin^2 V)\, d\sigma^2.$$

Mais, si l'on introduit le paramètre de distribution k au moyen des relations (13) et (18)', qui donnent

$$A = \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2, \qquad k^2 = \sin^2 V \left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2,$$

on arrive à cette forme entièrement géométrique

$$(24) \qquad ds^2 = (du + \cos V\, d\sigma)^2 + \left(\frac{u^2}{k^2} + 1\right) \sin^2 V\, d\sigma^2.$$

Dans le cas particulier des *surfaces développables,* le calcul est plus simple encore : les génératrices étant les tangentes de la ligne de striction (arête de rebroussement), V est nul, A est égal au carré $1 : R^2$ de la courbure de cette ligne, et il vient

$$(25) \qquad ds^2 = (du + d\sigma)^2 + \frac{d\sigma^2}{R^2}.$$

Les résultats que nous venons d'obtenir jouent un rôle important dans la théorie de la déformation des surfaces réglées.

VI. — Lignes asymptotiques; surfaces minima réglées.

11. Nous allons former l'équation différentielle des lignes asymptotiques des surfaces réglées, en partant des formules générales

$$x = \xi + \lambda u, \qquad y = \eta + \mu u, \qquad z = \zeta + \nu u,$$

où toutes les lettres ont les significations que nous leur avons attribuées au n° 6.

Les coordonnées x, y, z de la surface étant des fonctions linéaires de u, leurs dérivées secondes x''_{u^2}, y''_{u^2}, z''_{u^2} sont nulles; le déterminant D est nul. L'équation des lignes asymptotiques se réduit à

$$dv\,(2D'\,du + D''\,dv) = 0.$$

Le facteur dv, égalé à zéro, donne $v = \text{const.}$, c'est-à-dire les génératrices de la surface. L'autre système d'asymptotiques est défini par l'équation

$$2\begin{vmatrix} \lambda' & \lambda & \xi' \\ \mu' & \mu & \eta' \\ \nu' & \nu & \zeta' \end{vmatrix} \frac{du}{dv} + \begin{vmatrix} \xi'' + \lambda'' u & \lambda & \xi' + \lambda' u \\ \eta'' + \mu'' u & \mu & \eta' + \mu' u \\ \zeta'' + \nu'' u & \nu & \zeta' + \nu' u \end{vmatrix} = 0,$$

que nous écrirons

$$(26) \qquad 2D' \frac{du}{dv} + Lu^2 + Mu + N = 0,$$

en représentant par L et N les deux déterminants

$$L = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix}, \qquad N = \begin{vmatrix} \lambda & \xi' & \xi'' \\ \mu & \eta' & \eta'' \\ \nu & \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix},$$

et par M un déterminant qui est la dérivée de D' par rapport à v.

Les quatre coefficients D', L, M, N étant des fonctions de la seule variable v, *la détermination des asymptotiques d'une surface réglée dépend d'une équation de Riccati.*

De là découlent diverses conséquences :

1° Le rapport anharmonique de quatre solutions d'une équation de Riccati étant constant, et u désignant la distance d'un point variable d'une génératrice à un point fixe sur cette droite, on voit que *si* (C_1), (C_2), (C_3), (C_4) *sont quatre asymptotiques fixes, mais quelconques, les quatre points* P_1, P_2, P_3, P_4 *où elles rencontrent les diverses génératrices de la surface ont même rapport anharmonique pour toutes ces génératrices.* C'est ce qu'on énonce plus brièvement ainsi : *les génératrices d'une surface réglée sont divisées harmoniquement par ses lignes asymptotiques.*

2° *Si l'on connaît trois asymptotiques, on les obtient toutes sans intégration; si l'on connaît deux asymptotiques, on les détermine toutes au moyen d'une seule quadrature; si l'on connaît une seule asymptotique, on les trouve toutes par deux quadratures.* Cela résulte des propriétés connues de l'équation de Riccati.

12. Voici deux cas dans lesquels la dernière circonstance se présente. Supposons d'abord que l'équation (26) ne contienne pas de terme en $\dot{u}^2$, et, par suite, se réduise à une équation linéaire. On peut supposer que le coefficient L, au lieu d'être nul, tende vers zéro; on voit alors, en prenant pour fonction inconnue l'inverse de u, que $u = \infty$ est une solution de la proposée : en d'autres termes, la surface admet une asymptotique rejetée tout entière à l'infini. Pour que L soit identiquement nul, il faut et il suffit qu'il existe trois constantes A, B, C telles que l'on ait toujours

$$A\lambda + B\mu + C\nu = 0,$$

c'est-à-dire que les génératrices soient parallèles au plan

$$Ax + By + Cz = 0.$$

La surface est une surface à plan directeur. Nous avons déjà traité ce cas directement (Ch. VIII, n° 8).

Supposons maintenant que l'équation (26) ne contienne pas de terme constant, c'est-à-dire que N soit nul. Cela signifie que la courbe (Γ), lieu du point (ξ, η, ζ), est une asymptotique de la surface. En effet, le déterminant N étant nul, il existe deux fonctions P et Q de la variable v, telles qu'on ait identiquement

$$\lambda = P\xi' + Q\xi'' \qquad \mu = P\eta' + Q\eta'', \qquad \nu = P\zeta' + Q\zeta''.$$

Ces formules expriment que la génératrice (λ, μ, ν) est contenue dans le plan osculateur à la courbe (Γ) et que, par suite, le plan tangent à la surface se confond avec ce plan osculateur : ainsi (Γ) est une asymptotique. Réciproquement, *les formules*

$$x = \xi + (P\xi' + Q\xi'')u, \quad y = \eta + (P\eta' + Q\eta'')u, \quad z = \zeta + (P\zeta' + Q\zeta'')u,$$

où P *et* Q *sont des fonctions arbitraires de* v, *représentent toutes les surfaces réglées qui admettent pour ligne asymptotique la courbe* (Γ), *lieu du point* (ξ, η, ζ). De ce nombre sont les surfaces formées par les normales principales d'une courbe gauche; cette courbe est une de leurs asymptotiques.

Considérons enfin une surface engendrée par la droite qui joint chaque point d'une courbe gauche (Γ) au centre de la sphère osculatrice en ce point. On connaît, bien qu'elle ne soit pas mise

immédiatement en évidence par l'équation différentielle (26), une ligne asymptotique de la surface : c'est le lieu des centres des sphères osculatrices de (Γ). En effet, cette courbe étant l'arête de rebroussement de la surface polaire de (Γ), son plan osculateur, qui est le plan normal de (Γ), reste constamment tangent à la surface considérée.

13. Nous rattacherons à l'équation (26) le résultat suivant :

THÉORÈME. — *L'hélicoïde à plan directeur est la seule surface réglée réelle qui soit en même temps une surface minima.*

En effet, les surfaces minima étant caractérisées par la propriété d'avoir en tous leurs points leurs asymptotiques rectangulaires, sur toute surface réglée minima une famille d'asymptotiques est formée par les trajectoires orthogonales des génératrices. Or, en chaque point d'une telle asymptotique, le plan osculateur est tangent à la surface; par suite, la génératrice qui est issue de ce point est située dans ce plan, ce qui exige qu'elle se confonde avec la normale principale de la ligne asymptotique. Ainsi toute surface réglée minima, s'il en existe, est le lieu des normales principales d'une courbe et même d'une infinité de courbes. Mais, d'après une proposition connue (Ch. IX, n° **11**), deux asymptotiques quelconques interceptent sur toutes les génératrices des segments de même longueur. Si donc nous rapportons les surfaces cherchées à leurs génératrices ($v =$ const.) et à une asymptotique prise pour courbe directrice, chaque asymptotique aura une équation de la forme $u =$ const. D'après cela, l'équation (26) devra se réduire à $du\,dv = 0$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut d'abord que L soit nul. Or la condition $L = 0$ exprime (n° **12**) que la surface est à plan directeur. D'ailleurs, toute courbe dont les normales principales sont parallèles à un plan est une hélice. Car, ce plan étant pris pour plan des xy, on a, par hypothèse, $\gamma' = 0$; et, en vertu des formules de Frenet, γ est constant, c'est-à-dire que les tangentes font un angle constant avec l'axe Oz, ce qui est une propriété caractéristique de l'hélice (Ch. V, n° **4**).

Toute asymptotique d'une des surfaces cherchées est donc une hélice. Si nous prenons pour paramètre v l'arc de la section

droite (S) du cylindre qui porte cette hélice (Γ), la coordonnée ζ d'un point de (Γ) pourra être prise proportionnelle à l'arc correspondant v et nous aurons, avec nos notations habituelles,

$$\zeta = mv, \qquad \zeta' = m, \qquad \zeta'' = 0,$$
$$\nu = 0, \qquad \nu' = 0, \qquad \nu'' = 0.$$

Dès lors, le déterminant D″, qui doit être nul quel que soit u, se réduit à

$$\begin{vmatrix} \xi'' + \lambda'' u & \lambda & \xi' + \lambda' u \\ \eta'' + \mu'' u & \mu & \eta' + \mu u \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = m[(\mu\lambda'' - \lambda\mu'')u + \mu\xi'' - \lambda\eta''].$$

En particulier le coefficient de u doit être nul, ce qui donne

$$\mu\lambda' - \lambda\mu' = \text{const.}$$

Or λ et μ sont respectivement les cosinus α' et β' de la normale principale à la section droite (S). Les formules de Frenet donnent en conséquence

$$\lambda' = \frac{d\alpha'}{dv} = -\frac{\alpha}{R_1} = \frac{\beta'}{R_1}, \qquad \mu' = \frac{d\beta'}{dv} = -\frac{\beta}{R_1} = -\frac{\alpha'}{R_1},$$

R_1 étant le rayon de courbure de la section. On a donc

$$\mu\lambda' - \lambda\mu' = \frac{\beta'^2 + \alpha'^2}{R_1} = \frac{1}{R_1},$$

ce qui montre que R_1 est constant, ou que (S) est un cercle. Il suit de là que la seule surface réglée réelle qui puisse être une surface minima est l'hélicoïde à plan directeur. Or, nous savons qu'il jouit bien de cette propriété (Ch. VIII, n° 7), ce qui achève la démonstration du théorème.

CHAPITRE XI.

ARCS, AIRES ET VOLUMES.

I. — Formules de rectification; premiers exemples.

1. Nous avons défini au Chapitre II (nº 5) la *longueur d'un arc* de courbe, plane ou gauche. *Rectifier* un arc, c'est évaluer sa longueur, c'est-à-dire calculer l'intégrale

$$(1) \qquad s = \int_{u_a}^{u_b} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

où dx, dy, dz sont les différentielles des coordonnées rectangulaires d'un point de l'arc, u_a et u_b les valeurs que prend à son origine et à son extrémité le paramètre u, en fonction duquel sont exprimées x, y, z.

Il convient de voir ce que devient l'élément de cette intégrale quand on se sert des deux systèmes de coordonnées les plus usités après les coordonnées cartésiennes.

Pour calculer la forme quadratique

$$(2) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

dans le système des *coordonnées semi-polaires,* r, θ, z, rappelons les relations bien connues

$$(3) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

En les différentiant, on trouve

$$(4) \qquad dx^2 + dy^2 = [d(r\cos\theta)]^2 + [d(r\sin\theta)]^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

d'où résulte immédiatement

$$(5) \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2.$$

Si l'on emploie les *coordonnées polaires de l'espace* ρ, ψ, θ, on partira des relations

$$(6)\qquad x = \rho \sin\psi \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\psi \sin\theta, \qquad z = \rho \cos\psi,$$

qui, rapprochées des équations (3), donnent

$$r = \rho \sin\psi, \qquad z = \rho \cos\psi.$$

Par suite, en appliquant la formule (5), on trouve

$$ds^2 = [d(\rho \sin\psi)]^2 + \rho^2 \sin^2\psi\, d\theta^2 + [d(\rho \cos\psi)]^2.$$

On achève le calcul en se servant de l'identité (4), où l'on remplace r par ρ et θ par ψ, ce qui donne finalement

$$(7)\qquad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2 + \rho^2 \sin^2\psi\, d\theta^2.$$

D'après la façon même dont nous avons mis l'expression différentielle (2) sous les formes (5) et (7), ces dernières expressions n'auraient changé en rien, si les coordonnées x, y, z avaient été entièrement indépendantes les unes des autres, auquel cas la forme (2) est dite *élément linéaire de l'espace*. Si l'on y remplace x, y, z par des fonctions de trois variables indépendantes u, v, w (*coordonnées curvilignes de l'espace*), il vient

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & (\Sigma x_u'^2)\, du^2 + (\Sigma x_v'^2)\, dv^2 + (\Sigma x_w'^2)\, dw^2 \\ & + 2(\Sigma x_u' x_v')\, du\, dv + 2(\Sigma x_v' x_w')\, dv\, dw + 2(\Sigma x_w' x_u')\, dw\, du, \end{aligned}$$

et nous avons vu, à propos du théorème de Dupin (Ch. IX, n° 12), que les trois identités

$$\Sigma x_u' x_v' = 0, \qquad \Sigma x_v' x_w' = 0, \qquad \Sigma x_w' x_u' = 0$$

expriment la propriété des surfaces coordonnées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$, de former un *système triple orthogonal*.

Or les trois formes (2), (5) et (7) présentent ce caractère commun de ne contenir que les carrés des différentielles qui y figurent. L'évanouissement des termes rectangles tient à ce que les trois systèmes de coordonnées que nous avons employés sont des systèmes triples orthogonaux (Ch. IX, n° 11).

2. Avant de rectifier quelques courbes planes remarquables, nous rappellerons deux résultats antérieurs (Ch. IV, n° 9).

Une *cycloïde* étant représentée par les équations

$$x = a(u - \sin u), \qquad y = a(1 - \cos u),$$

nous avons trouvé, pour la dérivée de son arc,

$$\frac{ds}{du} = 2a \sin \frac{u}{2}.$$

D'après cela, la portion de courbe comprise entre le sommet S ($u = \pi$) et le point M de paramètre u a pour longueur

$$s = 2a \int_{\pi}^{u} \sin \frac{u}{2}\, du = 4a \cos \frac{u}{2}.$$

Mais, la différence z des ordonnées de S et de M étant

$$z = 2a - a(1 - \cos u) = 2a \cos^2 \frac{u}{2},$$

on a $s^2 = 8az$, ce qui permet de construire s. On voit en outre, en faisant $z = 2a$, que la longueur d'une arcade entière de la cycloïde est égale à huit fois le rayon du cercle générateur.

Au même endroit nous avons rectifié la *chaînette*.

II. — Rectification des courbes unicursales.

3. Une courbe *unicursale* est une courbe dont les coordonnées peuvent être exprimées par des fonctions rationnelles d'un paramètre. Si la courbe est plane et d'ordre m, on aura

$$(8) \qquad x = \frac{A(u)}{C(u)}, \qquad y = \frac{B(u)}{C(u)},$$

en désignant par A, B, C trois polynômes entiers en u, du degré m, sans diviseur commun. De plus, ces formules font correspondre à chaque point simple (x_r, y_r) de la courbe une valeur unique u_r du paramètre u, de sorte que, si l'on appelle A′, B′, C′ les dérivées de A, B, C, prises par rapport à u, l'arc s compris

entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est représenté par l'intégrale

$$(9) \qquad \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} ds = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{(AC'-CA')^2+(BC'-CB')^2}}{C^2}\,du,$$

dont les limites sont parfaitement déterminées. C'est là une intégrale hyperelliptique dont le radical porte sur un polynôme du degré $4(m-1)$. Mais, quand la courbe présente certaines particularités, notamment quand elle coupe la droite de l'infini aux points cycliques, le polynôme soumis au radical admet des facteurs binômes multiples que l'on peut faire sortir au moins partiellement du radical; c'est ainsi que la rectification de certaines courbes dépend seulement d'intégrales elliptiques, ou même d'intégrales plus simples encore, comme on le verra dans plusieurs des exemples qui vont suivre.

Cercle. — Tout cercle de rayon R peut être représenté par les formules

$$x = a + \frac{(1-u^2)R}{1+u^2}, \qquad y = b + \frac{2uR}{1+u^2},$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\frac{ds}{du} = \frac{R\sqrt{16u^2+4(1-u^2)^2}}{(1+u^2)^2} = \frac{2R(1+u^2)}{(1+u^2)^2} = \frac{2R}{1+u^2}.$$

Le mécanisme de la réduction, qui remplace ici une intégrale elliptique par un arc tangente, se manifeste avec évidence.

Parabole. — Toute parabole du second degré étant tangente à la droite de l'infini, on reconnaît facilement que, quand ses coordonnées sont mises sous la forme (8), leur dénominateur commun $C(u)$ est un carré parfait. Or il est visible sur la formule (9) que, *si le polynôme* C *et sa dérivée* C' *ont un facteur binôme commun, on peut faire sortir ce facteur du radical.* Dans le cas présent, le radical ne portera plus que sur un polynôme du second degré.

On peut arriver autrement à la même réduction. En effet, *quand le polynôme* $C(u)$ *a toutes ses racines égales, on peut exprimer les coordonnées x et y par deux polynômes entiers;* il suffit d'opérer sur le paramètre u une transformation homographique

telle qu'à l'unique racine de C corresponde, pour le nouveau paramètre t, une valeur infinie. Alors x et y deviendront des polynômes entiers en t, et le radical qui figure dans la relation (9) ne portera plus que sur un polynôme du degré $2(m-1)$.

Pour la parabole, il suffit de partir de l'équation

$$y^2 = 2px,$$

et de prendre y comme variable. On trouve ainsi

$$p\,ds = \sqrt{y^2+p^2}\,dy.$$

En intégrant par parties, on déduit facilement de là

$$s = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p};$$

l'arc s est compté à partir du sommet de la parabole.

4. *Ellipse.* — L'équation de l'ellipse, rapportée à ses axes de symétrie, étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

si l'on prend pour variable x, on trouve

$$ds = \sqrt{\frac{a^4 - c^2x^2}{a^2 - x^2}}\,\frac{dx}{a} \qquad (c^2 = a^2 - b^2).$$

Intégrant à partir du sommet de droite ($x = a$, $y = 0$), nous avons

$$s = \int_a^x \frac{a^4 - c^2x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^4-c^2x^2)}}\,dx,$$

ce qui est la différence des deux intégrales elliptiques, l'une de première, l'autre de seconde espèce.

Si l'on pose avec Legendre $x = a\sin\varphi$, la relation précédente prend la forme plus simple

$$\frac{s}{a} = \int_0^\varphi \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

où e désigne l'excentricité de la courbe. Le développement du

radical par la formule du binôme donne lieu à une série uniformément convergente, quelle que soit la valeur de φ,

$$\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2.4}e^4\sin^4\varphi - \frac{1.3}{2.4.6}e^6\sin^6\varphi - \ldots - \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots2n}e^{2n}\sin^{2n}\varphi - \ldots.$$

On peut donc intégrer le second membre terme à terme, ce qui donnera l'arc développé suivant les puissances de l'excentricité.

Calculons par ce moyen la longueur totale E de l'ellipse

$$E = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Par l'emploi réitéré de la formule connue

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\,\frac{\pi}{2},$$

on trouvera le périmètre cherché

$$E = 2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{e^2}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{e^4}{3}-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{e^6}{5}-\ldots\right].$$

Remarque. — On peut souvent prendre pour *longueur approchée d'une ellipse celle d'une circonférence dont le diamètre serait égal à l'excès du triple de la moyenne arithmétique des demi-axes sur leur moyenne géométrique.* En effet, la longueur de cette circonférence

$$C = \pi\left(3\,\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)$$

peut être écrite de la façon suivante

$$C = \pi a\left(3\,\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{2} - \sqrt[4]{1-e^2}\right).$$

Or, si l'on effectue les développements des radicaux, on trouvera

$$\frac{a+b}{2} = 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{e^4}{16} - \frac{e^6}{32} - \frac{5e^8}{256} - \ldots,$$

$$\sqrt{ab} = 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{32} - \frac{7e^6}{128} - \frac{77e^8}{2048} - \ldots.$$

Ces valeurs, portées dans l'expression de C, reproduisent les quatre premiers termes de E; la différence entre E et C est donc de l'ordre de e^8, ce qui permet de la négliger, au moins pour les ellipses de faible excentricité.

5. *Cubiques circulaires.* — On appelle *circulaires* les courbes qui passent par les points cycliques. Tandis que, pour une cubique unicursale quelconque, le radical qui figure dans la formule (9) porte sur un polynôme du huitième degré, *l'arc des cubiques unicursales circulaires dépend d'une intégrale elliptique.*

En effet, toute cubique unicursale a un point double, qui ne peut être rejeté à l'infini quand la courbe est réelle et passe par les points cycliques. On peut donc mettre l'origine au point double, et, si l'on prend l'axe des y parallèle à l'asymptote réelle, l'équation générale des cubiques unicursales circulaires sera

$$x(x^2+y^2)-(ay^2+2bxy+cx^2)=0,$$

a, b, c désignant des constantes. Si l'on pose

$$y=ux, \qquad \mathrm{T}(u)=au^2+2bu+c,$$

on trouvera immédiatement

$$x=\frac{\mathrm{T}}{1+u^2}, \qquad y=\frac{u\mathrm{T}}{1+u^2}.$$

Différentiant et désignant par T' la dérivée de T, nous avons

$$\frac{dx}{du}=\frac{(1+u^2)\mathrm{T}'-2u\mathrm{T}}{(1+u^2)^2}, \qquad \frac{dy}{du}=\frac{u(1+u^2)\mathrm{T}'+(1-u^2)\mathrm{T}}{(1+u^2)^2}.$$

Faisons la somme des carrés et simplifions; il viendra

$$\frac{ds^2}{du^2}=\frac{\mathrm{T}^2-2u\mathrm{T}\mathrm{T}'+(1+u^2)\mathrm{T}'^2}{(1+u^2)^2}.$$

Le numérateur du second membre est seulement du quatrième degré, ce qui prouve notre assertion. Parmi les courbes considérées figurent les strophoïdes obliques ou droites, ainsi que les cissoïdes, qui correspondent au cas où le trinôme T est un carré parfait. Dans ce cas, l'arc s'exprime sans intégrale elliptique : on le voit en faisant $\mathrm{T}=a(u-h)^2$. Si h est nul, la cissoïde est droite.

6. *Épicycloïdes.* — On appelle *épicycloïde* la courbe que décrit un point d'un cercle qui roule sur un autre cercle. *Quand les rayons des deux cercles ont une commune mesure, l'épicycloïde est unicursale.* Prenons en effet pour origine des coordonnées le centre du cercle fixe, pour unité de longueur son rayon, et soit m le rayon du cercle mobile. Si ce cercle roule *extérieurement* sur le cercle fixe, les coordonnées de l'épicycloïde seront représentées, en fonction d'un angle auxiliaire φ, par les formules connues

$$(\text{E}) \qquad \begin{cases} x = (1+m)\cos m\varphi - m\cos(1+m)\varphi, \\ y = (1+m)\sin m\varphi - m\sin(1+m)\varphi. \end{cases}$$

Si le cercle mobile roule *intérieurement* sur le cercle fixe, c'est-à-dire de telle façon que les deux centres soient du même côté de la tangente commune, l'épicycloïde a pour équations

$$(\text{H}) \qquad \begin{cases} x = (1-m)\cos m\varphi + m\cos(1-m)\varphi, \\ y = (1-m)\sin m\varphi - m\sin(1-m)\varphi. \end{cases}$$

On lui donne aussi, dans ce cas, le nom d'*hypocycloïde*. Soit q le dénominateur de la fraction m, supposée irréductible. Il suffit évidemment de prendre comme nouveau paramètre

$$u = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2q},$$

pour que x et y deviennent des fonctions rationnelles de u.

Je dis maintenant que *tout arc d'épicycloïde s'exprime algébriquement en fonction des coordonnées de son extrémité.* Il suffit de le vérifier sur les formules (E), les équations (H) se déduisant des précédentes par le changement de m en $m-1$. Or, on a

$$\begin{aligned} dx &= -m(1+m)[\sin m\varphi - \sin(1+m)\varphi]\,d\varphi, \\ dy &= m(1+m)[\cos m\varphi - \cos(1+m)\varphi]\,d\varphi; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$ds^2 = 2m^2(1+m)^2(1-\cos\varphi)\,d\varphi^2 = 4m^2(1+m)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi^2.$$

Extrayant la racine carrée et intégrant, on trouve

$$s = 4m(1+m)\left(\cos\frac{\varphi_0}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\right),$$

les angles φ_0 et φ correspondant respectivement à l'origine et à l'extrémité de l'arc cherché. On voit que sa longueur s est une fonction algébrique des coordonnées x et y de son extrémité; car $\cos\varphi$, tiré des équations (E), est une fonction linéaire de x^2+y^2.

Nous citerons, comme exemple d'épicycloïde, la courbe appelée *cardioïde*, qui est un cas particulier du limaçon de Pascal et qui est représentée par les formules (E) quand on y fait $m=1$. C'est une quartique qui a un point de rebroussement, et qui admet comme points doubles les points cycliques. Mentionnons encore une autre quartique, *l'hypocycloïde à trois rebroussements*, qui touche la droite de l'infini aux deux points cycliques, et qu'on obtient en faisant $m=\frac{1}{3}$ dans les équations (H).

III. — Arcs en coordonnées polaires.

7. Une courbe plane étant rapportée à des coordonnées polaires, la différentielle de son arc est donnée, d'après ce que nous avons vu au n° **1**, par la formule

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2}, \tag{10}$$

où il n'est pas nécessaire de spécifier la variable indépendante, à raison de la règle connue pour le changement de variable sous le signe d'intégration.

Spirale logarithmique. — Cette courbe, dont l'équation est

$$r = ae^{m\theta},$$

admet l'origine des coordonnées comme point asymptote; on voit, en effet, que si la constante m est positive, ce qu'on peut toujours supposer, le rayon vecteur r ne devient nul que pour $\theta = -\infty$. La courbe présente une infinité de spires qui s'enroulent autour de l'origine. Néanmoins, l'arc compris entre ce point asymptote O et un point M d'angle polaire θ a une longueur finie. En effet, la formule (10) donne ici

$$ds = a\sqrt{1+m^2}\,e^{m\theta}\,d\theta = \frac{a}{m}\sqrt{1+m^2}\,dr.$$

Intégrant à partir de $r = 0$, on trouve, pour l'arc OM,

$$s = \frac{r\sqrt{1+m^2}}{m}.$$

Si, maintenant, on mène la tangente en M et le rayon vecteur perpendiculaire à OM, ces deux droites se coupent en un point T; le segment MT, que nous avons évalué sous le nom de *tangente* (Ch. II, n° 2), a pour longueur

$$\frac{r}{r'}\sqrt{r^2+r'^2} = \frac{r\sqrt{1+m^2}}{m}.$$

Ainsi, *l'arc de spirale logarithmique, compté à partir du point asymptote, est égal à la tangente en son extrémité.*

Cardioïde. — La tangente de rebroussement étant prise pour axe polaire, l'équation de la cardioïde est

$$r = a(1-\cos\theta).$$

En appliquant la formule (10), on trouve

$$ds = a\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta.$$

Intégrant à partir du point de rebroussement, on a

$$s = 4a\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right) = 8a\sin^2\frac{\theta}{4},$$

ce qui montre que l'arc est algébrique (n° 6).

Lemniscate. — De l'équation connue $r^2 = a^2\cos 2\theta$, nous tirons

$$\theta = \frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2};$$

la variable indépendante étant r, la formule (10) donne

$$ds = \frac{a^2\,dr}{\sqrt{a^4-r^4}}.$$

Ainsi, *la rectification de la lemniscate dépend d'une intégrale elliptique de première espèce.* La courbe étant unicursale et du quatrième ordre, si l'on exprimait ses coordonnées en fonc-

tions rationnelles d'un paramètre u, le radical qui figure dans la valeur de ds devrait porter sur un polynôme du degré 12. La réduction, qui tient aux propriétés particulières de la lemniscate relativement aux points cycliques (n° 3), s'est opérée d'elle-même grâce à l'emploi des coordonnées polaires.

Posant $r = a\sqrt{1-t^2}$, on arrive à la forme canonique

$$ds = \frac{a\,dt}{\sqrt{2}\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{t^2}{2}\right)}}.$$

Intégrant à partir d'un sommet de la courbe ($t=0$), on aura

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{t^2}{2}\right)}}.$$

L'inversion de cette intégrale donne, comme on sait,

$$t = \operatorname{sn}\frac{s\sqrt{2}}{a}, \qquad r = a\operatorname{cn}\frac{s\sqrt{2}}{a},$$

les notations étant celles de Jacobi; le module est $1:\sqrt{2}$.

Autre exemple. — Considérons enfin la sextique

$$(x^2+y^2)^3 - 2x(x^2-3y^2) = 0.$$

Son équation en coordonnées polaires peut s'écrire

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos\frac{r^3}{2}.$$

En appliquant la formule (10), on trouve

$$ds = \frac{2\,dr}{\sqrt{4-r^6}} = \frac{dt}{\sqrt{4t^3-1}} \qquad \left(t=\frac{1}{r^2}\right),$$

d'où l'on tire, en comptant les arcs à partir du point triple,

$$\frac{1}{r^2} = \wp(s;\, g_2,\, g_3);$$

les notations sont ici celles de M. Weierstrass; les invariants ont respectivement pour valeurs $g_2 = 0$, $g_3 = 1$.

IV. — Intégrales doubles; aires planes.

8. Toute l'étude des aires est fondée sur deux importantes propositions d'Analyse, que nous nous contenterons de rappeler.

Théorème I. — *Étant donnée une fonction* $F(x, y)$, *continue par rapport aux deux variables x et y dans toute une région finie* (C) *du plan des xy, on trace sur ce plan un réseau de parallèles $x = x_r$ et $y = y_s$ aux axes de coordonnées, les nombres x_r allant tous en croissant ou en décroissant quand l'indice r augmente, de même pour les nombres y_s et l'indice s; on considère toutes les mailles du réseau qui ont leurs quatre sommets à l'intérieur ou sur le périmètre de la région* (C) *et l'on forme la somme double*

$$S = \sum_{r,s} F(\xi_{r,s}, \eta_{r,s})(x_{r+1} - x_r)(y_{s+1} - y_s),$$

où $\xi_{r,s}$ et $\eta_{r,s}$ sont les coordonnées d'un point pris arbitrairement à l'intérieur ou sur le contour de la maille limitée par les quatre droites $x = x_r$, $x = x_{r+1}$, $y = y_s$, $y = y_{s+1}$.

Si l'on fait tendre tous les intervalles $x_{r+1} - x_r$, $y_{s+1} - y_s$ vers zéro, suivant une loi quelconque, tandis que leur nombre augmente indéfiniment, les diverses sommes S *arrivent à différer aussi peu qu'on veut les unes des autres.*

C'est l'une quelconque de ces sommes, aussi voisines qu'on veut, que l'on appelle l'*intégrale double de la fonction* $F(x, y)$, *étendue à la région* (C), et que l'on représente par le symbole

$$\iint_{(C)} F(x, y)\, dx\, dy. \tag{11}$$

On peut, pour évaluer cette intégrale double, sommer d'abord tous les éléments qui correspondent à une même valeur de l'un des deux indices, r par exemple, puis réunir les résultats partiels relatifs aux diverses valeurs de r; c'est ce que l'on exprime brièvement en disant qu'*on intègre d'abord par rapport à y, en laissant x constant, puis par rapport à x.*

Théorème II. — *Si l'on exprime x et y par des fonctions bien déterminées de deux nouvelles variables*

$$(12) \qquad x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v),$$

de telle sorte qu'à tout point de la région (C) *corresponde un seul point de la région du plan des uv que l'on fait correspondre à cette région* (C), *l'intégrale* (11) *prend la forme équivalente*

$$(13) \qquad \int\int_{(C)} F(x, y) \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\, dv,$$

les fonctions x et y, ainsi que leurs dérivées partielles, étant remplacées par leurs expressions tirées des relations (12) *et la sommation s'étendant à toutes les mailles du plan des uv, dont les sommets correspondent à des points (x, y) situés à l'intérieur ou sur le périmètre de la région* (C).

Ce théorème, combiné avec la remarque qui suit le précédent, fournit un moyen, très fréquemment employé, d'évaluer les intégrales doubles.

9. *Définition.* — Une région (C) étant délimitée de toutes parts sur un plan, traçons sur ce plan un réseau de droites parallèles à deux axes rectangulaires Ox, Oy, et sommons les aires de tous les rectangles du réseau qui ont leurs sommets à l'intérieur ou sur le contour de la région (C). Le nombre de ces rectangles croissant indéfiniment, et les dimensions de chacun d'eux tendant vers zéro, la somme de leurs aires deviendra l'intégrale double

$$(14) \qquad A = \int\int_{(C)} dx\, dy.$$

Par définition, *cette intégrale est l'aire de la région* (C). Pour que cette définition soit acceptable, il faut prouver que l'intégrale ci-dessus a une valeur indépendante de la direction des axes. A cet effet, exprimons-la au moyen de nouvelles coordonnées x_1, y_1. Les formules (12), qui sont ici

$$x = a + x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha,$$
$$y = b + x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha,$$

donnent l'*unité* pour valeur du déterminant fonctionnel de x et y par rapport à x_1 et y_1, de sorte que l'intégrale (14) devient

$$\int\int_{(C)} dx_1\, dy_1.$$

Or c'est précisément à cette intégrale double que conduit la sommation des mailles dont les côtés sont parallèles aux axes des x_1 et des y_1. Ainsi *l'aire d'une région est la somme de toutes les mailles qui y sont découpées par un réseau quelconque de droites rectangulaires.*

Cet énoncé est encore valable quand les mailles du réseau sont des quadrilatères curvilignes. En effet, si l'on remplace sous les conditions du théorème II (n° 8) les variables x, y par des coordonnées curvilignes u, v, l'aire de la région (C) sera représentée par l'intégrale double

$$(15) \qquad \int\int_{(C)} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\, dv.$$

Or si l'on réduit la région (C) à la maille (m) comprise entre les quatre courbes coordonnées u, $u + du$, v, $v + dv$, on voit que l'on obtiendra l'aire de cette maille en calculant l'intégrale

$$\int\int_{(m)} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) \delta u\, \delta v$$

où les différentielles δu, δv sont incomparablement plus petites que du et dv. Mais, d'après une propriété connue, cette intégrale peut être écrite

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 \int\int_{(m)} \delta u\, \delta v = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 du\, dv,$$

l'indice o désignant une valeur que le déterminant fonctionnel prend en un certain point de la maille (m). Or la substitution de cette valeur moyenne à celle que le déterminant acquiert au sommet (u, v) de la maille n'influe pas, d'après la définition de l'intégrale double (n° 8), sur la valeur de l'intégrale (15). On est donc en droit de dire que *l'aire d'une région est la somme des aires des mailles qui y sont découpées par un réseau curviligne quelconque.*

Revenant alors au théorème II du n° 8, on peut l'énoncer brièvement ainsi : *L'intégrale double d'une fonction* $F(x, y)$ *étendue à une région* (C) *est la somme des aires des mailles que découpe dans cette région un réseau curviligne quelconque, multipliées chacune par la valeur que la fonction* F *prend en un point arbitraire de leur intérieur ou de leur contour.*

Remarque. — L'opération qui consiste à évaluer l'aire d'une surface a été appelée la *quadrature* de cette surface par les anciens géomètres, qui cherchaient à construire un carré équivalent à la surface proposée. On voit que cette opération exige, en général, le calcul successif de deux intégrales simples, dont la première contient dans son élément différentiel une variable considérée comme une constante indéterminée, x par exemple, si l'on intègre d'abord par rapport à y, et dont les limites sont des fonctions de cette même variable. Les difficultés qui résultent de là peuvent souvent être évitées par l'emploi de coordonnées curvilignes convenables.

V. — Aires des trapèzes mixtilignes plans.

10. Étant donné, dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires, un trapèze mixtiligne (T) ayant pour bases deux ordonnées $x = x_0$ et $x = X$ $(X > x_0)$, pour côtés les segments que ces deux ordonnées interceptent, d'une part, sur l'axe des x, d'autre part sur un arc de courbe représenté par l'équation $y = f(x)$, l'aire de ce trapèze est exprimée par l'intégrale double

$$A = \int\int_{(T)} dx\, dy. \tag{16}$$

Intégrant d'abord par rapport à y (n° 8) entre les valeurs limites qui, pour chaque valeur de x, sont respectivement zéro et $y = f(x)$, nous trouvons

$$A = \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx. \tag{17}$$

La *quadrature* de l'aire considérée se ramène donc immédiate-

ment à l'évaluation d'une *intégrale simple;* de là vient la synonymie de ces deux termes, employés indifféremment l'un pour l'autre en Analyse.

Si les axes de coordonnées sont obliques et font entre eux un angle λ, il faut concevoir un système auxiliaire d'axes rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, d'où l'on passe au système oblique Ox, Oy. En vertu des formules de transformation de coordonnées qui conviennent à ce cas, le déterminant fonctionnel de ξ et de η, par rapport à x et à y, est égal à $\sin\lambda$. L'intégrale (16) devient alors

$$(16)' \qquad A = \int\int_{(T)} \sin\lambda \, dx \, dy = \sin\lambda \int\int_{(T)} dx \, dy,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$(17)' \qquad A = \sin\lambda \int_{x_0}^{X} f(x) \, dx.$$

Remarque. — Nous avons implicitement supposé l'ordonnée $f(x)$ positive entre x_0 et X; si elle était négative, on devrait, pour avoir une aire positive, la remplacer par sa valeur absolue $-f(x)$.

Si la courbe $y = f(x)$ traversait plusieurs fois l'axe des x entre les ordonnées x_0 et X, l'intégrale de la valeur algébrique de y, prise entre les limites x_0 et X, représenterait la différence entre la somme des aires situées au-dessus de l'axe des x et celle des aires situées au-dessous.

11. *Aires polygonales.* — On évalue d'abord l'aire d'un triangle rectangle en faisant $f(x) = bx : a$, $x_0 = 0$, $X = a$ dans la formule (17). On trouve ainsi

$$A = \frac{ab}{2},$$

a et b désignant les deux côtés de l'angle droit. On passe au cas général en sommant deux triangles rectangles.

Pour le parallélogramme, on applique la formule (17)'. Les côtés a et b faisant l'angle λ, on pose $f(x) = b$, $x_0 = 0$, $X = a$, ce qui donne

$$A = ab \sin\lambda.$$

On est alors en mesure d'évaluer toutes les aires polygonales.

Cercle. — Pour évaluer l'aire du segment compris entre deux cordes parallèles $x = x_0$ et $x = X$ du cercle qui a pour équation

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

il suffit, d'après ce qui précède, de doubler l'intégrale positive

$$\int_{x_0}^{X} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right]_{x_0}^{X}.$$

Avec $x_0 = 0$, $X = a$, on trouve πa^2 pour aire du cercle entier.

Ellipse. — L'équation de l'ellipse étant mise sous la forme

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

le segment d'ellipse compris entre les deux cordes $x = x_0$, $x = X$ s'obtient en multipliant par $b : a$ l'aire du segment de cercle que nous venons d'évaluer; par suite, l'aire de l'ellipse entière est πab.

Hyperbole. — L'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes étant mise sous la forme

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

le triangle mixtiligne SPM, qui a pour côtés rectilignes l'axe transverse SP et l'ordonnée PM ($x = X$), pour côté curviligne l'arc de courbe SM compris entre le sommet et l'ordonnée X, est mesuré par l'intégrale

$$A = \int_{a}^{X} \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{2a} X \sqrt{X^2 - a^2} - \frac{ab}{2}\log\frac{X + \sqrt{X^2 - a^2}}{a}.$$

Or, le premier terme de A représente l'aire du triangle rectiligne dont les trois sommets sont M, P et le centre O de la courbe; par suite, le terme logarithmique mesure l'aire du triangle curviligne OSM (secteur hyperbolique).

Si l'hyperbole est rapportée à ses asymptotes, son équation étant alors $xy = k^2$, le trapèze curviligne formé par la courbe, l'asymptote Ox et deux ordonnées $x = x_0$, $x = X$, a pour aire

$$A = \sin\lambda \int_{x_0}^{X} \frac{k^2}{x}\, dx = k^2 \sin\lambda \log\frac{X}{x_0},$$

λ désignant l'angle des asymptotes. C'est à raison de ce résultat qu'on appelle quelquefois *logarithmes hyperboliques* les logarithmes népériens.

Il importe de remarquer que si, laissant X constant, on faisait décroître x_0 de manière à rapprocher indéfiniment l'ordonnée initiale de l'asymptote Oy, l'aire A du trapèze hyperbolique croîtrait sans limite.

Parabole. — Soit $y^2 = 2p'x$ l'équation d'une parabole rapportée à l'un de ses diamètres Ox et à la tangente Oy à l'extrémité de ce diamètre. Le segment MOM', que détache de la parabole l'ordonnée $x = X$, a pour aire

$$A = 2\sin\lambda \int_0^X \sqrt{2p'}\, x^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\sin\lambda\sqrt{2p'}\, X^{\frac{3}{2}},$$

λ désignant toujours l'angle des axes. Soit Y l'ordonnée du point terminal M. On pourra écrire

$$A = \frac{4}{3} XY \sin\lambda.$$

Mais $2XY\sin\lambda$ représente, on l'a vu, l'aire du parallélogramme construit sur la corde $MM' = 2Y$ du segment considéré et sur l'abscisse X. Ainsi, *le segment limité par un arc de parabole et sa corde vaut les deux tiers du parallélogramme construit sur sa corde et sur sa flèche* (segment du diamètre conjugué de la corde, compris entre elle et la courbe).

12. Quand une courbe plane est définie par deux équations

$$x = f_1(u), \qquad y = f_2(u),$$

qui en fournissent une représentation normale (Ch. I, n°s 1 et 2) au moyen d'un paramètre u, on peut se servir de cette variable auxiliaire pour évaluer l'aire

$$A = \int_{x_0}^X y\, dx.$$

En effet, à chaque point de la courbe ne correspond, par hypothèse, qu'une seule valeur de u; soient u_0 et U les valeurs qui correspondent aux extrémités du côté curviligne du trapèze. La

fonction $f_1(u)$ n'ayant qu'une valeur et admettant une dérivée $f'_1(u)$ dans l'intervalle (u_0, U), on est dans les conditions exigées pour le changement de variable sous le signe d'intégration, et l'on peut écrire

$$A = \int_{u_0}^{U} f_2(u) f'_1(u)\, du, \tag{18}$$

formule dont nous allons faire des applications.

Cycloïde. — Partons des équations connues (Ch. IV, n° 9)

$$x = a(u - \sin u), \qquad y = a(1 - \cos u).$$

Nous aurons à calculer l'intégrale

$$A = a^2 \int_{u_0}^{U} (1 - \cos u)^2\, du.$$

Pour évaluer l'aire à partir de l'origine, qui est un point de rebroussement, jusqu'à l'ordonnée qui répond à l'angle U, on devra faire $u_0 = 0$ et l'on aura

$$A = a^2 \left(\frac{3}{2} U - 2 \sin U + \frac{1}{2} \sin U \cos U \right).$$

A l'extrémité de l'arcade, U est égal à 2π et A à $3\pi a^2$. Ainsi, *l'aire totale comprise entre une arcade de cycloïde et la base équivaut à trois fois l'aire du cercle générateur.*

Courbes unicursales. — Pour ces courbes, $f_1(u)$ et $f_2(u)$ sont des fonctions rationnelles; par suite, *la quadrature de tout trapèze ayant pour côté curviligne un arc de courbe unicursale dépend de l'intégration d'une fraction rationnelle.*

Soit, comme exemple, la *cissoïde droite,* définie en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0.$$

Elle a un point de rebroussement à l'origine, où la tangente est l'axe des x, et admet pour seule asymptote réelle la droite $x = 2a$. En posant $y = ux$, on trouve

$$x = \frac{2au^2}{1 + u^2}, \qquad y = \frac{2au^3}{1 + u^2}, \qquad y\, dx = \frac{8a^2 u^4\, du}{(1 + u^2)^3}.$$

Pour avoir toute la courbe, il faut faire varier u de $-\infty$ à $+\infty$. Or l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^4\,du}{(1+u^2)^3}$$

est finie, parce que le numérateur de la fraction rationnelle est du quatrième degré, le dénominateur du sixième, et que, de plus, ce dénominateur n'a pas de racine réelle. En effectuant le calcul, on trouve que *l'aire totale comprise entre la cissoïde et son asymptote est égale à* $3\pi a^2$. C'est là unexemple d'une région qui, bien que s'étendant à l'infini, a une aire finie.

VI. — Aires des secteurs plans.

13. Un secteur plan étant la portion de plan comprise entre une courbe et les deux côtés d'un angle, on est conduit, pour évaluer son aire, à employer un système de lignes coordonnées dont fassent partie les droites issues du sommet de l'angle. Tel est, entre autres, le système des coordonnées polaires. Des formules de transformation (3), on déduit

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r} = r,$$

de sorte que l'intégrale (16) devient

$$\int\int_{(C)} r\,dr\,d\theta.$$

Intégrant d'abord par rapport à r (n° 8) entre les limites qui, pour chaque valeur de θ, sont respectivement 0 et le rayon vecteur $r = f(\theta)$ de la courbe qui termine le secteur, nous aurons

$$\text{(19)} \qquad A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\Theta} r^2\,d\theta,$$

θ_0 et Θ étant les angles polaires des côtés rectilignes du secteur. Il faut naturellement, pour que cette formule ait un sens, qu'à chaque valeur de θ, comprise entre les limites de l'intégration, ne corresponde qu'une seule valeur de r.

Considérons, par exemple, la *lemniscate,* qui, rapportée à son point double et à l'un de ses axes de symétrie, a pour équation

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

L'aire du secteur compris entre l'axe polaire, la droite $\theta = \Theta$ et la courbe est mesurée par l'intégrale

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{\Theta} \cos 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{4} \sin 2\Theta.$$

Pour avoir l'aire entière comprise à l'intérieur de la courbe, il faudrait ajouter les deux intégrales

$$\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta, \qquad \frac{a^2}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta,$$

le rayon vecteur r n'étant réel que pour les valeurs de θ comprises entre les limites de chacune d'elles. Il revient au même de faire Θ égal à $\frac{\pi}{4}$ dans l'intégrale précédente et de quadrupler le résultat, ce qui donne a^2 comme aire totale.

14. Quand on connaît, pour la courbe qui limite le secteur, une représentation normale (Ch. I, nos 1 et 2)

$$x = f_1(u), \qquad y = f_2(u),$$

on peut transformer l'intégrale (19) qui mesure le secteur. Des relations (3) résulte l'identité usuelle

$$r^2 \, d\theta = x \, dy - y \, dx,$$

en vertu de laquelle l'intégrale A devient

$$A = \frac{1}{2}\int (x \, dy - y \, dx). \tag{20}$$

Dans cette formule x et y sont supposés remplacés par leurs expressions en fonction du paramètre u; leurs différentielles sont prises par rapport à u; les limites de l'intégration sont les valeurs u_0 et U qui correspondent, pour le paramètre u, aux limites θ_0 et Θ de l'intégrale (19).

Ce qui précède s'applique notamment aux courbes unicursales, et conduit à un calcul un peu plus simple que l'emploi de la formule (18). Reportons-nous, en effet, aux relations (8) et soient A', B', C' les dérivées de A, B, C par rapport à u. Pour évaluer l'aire d'un trapèze en partie terminé par la courbe unicursale (8), nous aurons à intégrer la fraction rationnelle

$$y\frac{dx}{du} = \frac{B(CA' - AC')}{C^3}.$$

Pour l'aire du secteur, on devra intégrer celle-ci,

$$x\frac{dy}{du} - y\frac{dx}{du} = \frac{A(CB' - BC')}{C^3} - \frac{B(CA' - AC')}{C^3} = \frac{AB' - BA'}{C^2},$$

dont le dénominateur est le carré du polynôme C, tandis que la précédente avait pour dénominateur C^3.

15. Voici encore une expression d'une aire sectorielle qui peut parfois servir. On a identiquement

$$\frac{1}{2}r^2\,d\theta = \frac{1}{2}r\frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta = \frac{1}{2}r\sin V\,ds.$$

Nous avons mis en évidence le sinus de l'angle V que fait la tangente au point M (r, θ) avec le rayon vecteur (Ch. IV, n° 7) et la différentielle de l'arc s terminé en M. Or le produit $r\sin V$ mesure la longueur h de la perpendiculaire abaissée du pôle sur la tangente en M; d'où résulte la formule

$$\text{(21)} \qquad A = \frac{1}{2}\int h\,ds,$$

que sa signification géométrique rend presque intuitive.

Appliquons-la au secteur compris entre la parabole $y^2 = 2px$, son axe SF et le rayon vecteur qui va du foyer F au point P d'ordonnée Y. Si y désigne l'ordonnée d'un point M de l'arc SP, la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente en ce point a, comme on sait, son pied Q sur l'axe Oy, en un point dont l'ordonnée est la moitié de y. On a, par suite,

$$h = FQ = \frac{1}{2}\sqrt{y^2+p^2}.$$

D'autre part, nous avons trouvé (n° 3), pour la différentielle de l'arc de parabole

$$ds = \frac{\sqrt{y^2+p^2}}{p}\,dy.$$

Dès lors la formule (21) donne

$$A = \int_0^Y \frac{y^2+p^2}{4p}\,dy = \frac{1}{4p}\left(\frac{Y^3}{3}+p^2 Y\right),$$

ce qui fait connaître l'aire du secteur parabolique SFP.

VII. — Aires des surfaces courbes.

16. Considérons sur une surface (S) une région fermée (R), à l'intérieur de laquelle cette surface ne présente que des points simples, et soit

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v)$$

une représentation de la surface, *normale* (Ch. I, n°s 5 et 6) au moins pour toute la région (R). A tout point de (R) correspond, en conséquence, un seul couple (u, v); et, en tout point de (R), l'un au moins des déterminants fonctionnels

$$x'_u y'_v - x'_v y'_u, \qquad y'_u z'_v - y'_v z'_u, \qquad z'_u x'_v - z'_v x'_u$$

est différent de zéro.

Nous allons inscrire dans la région (R) une surface polyédrale à faces triangulaires dont les sommets seront ceux des mailles du réseau $u =$ const., $v =$ const.; puis nous sommerons tous ces triangles plans. Soient

$$M(u, v), \qquad M_1(u+\Delta u, v), \qquad M_2(u, v+\Delta v), \qquad M'(u+\Delta u, v+\Delta v)$$

les quatre sommets d'une maille, supposés tous à l'intérieur ou sur le contour de la région.

Ils déterminent deux triangles MM_1M_2 et $M'M_1M_2$ dont nous ferons décroître indéfiniment les dimensions; mais on peut remarquer que, d'après nos hypothèses, chacune de ces facettes présentera un angle qui, étant celui des lignes coordonnées, ne tendra pas vers zéro (Ch. II, n° 14).

Évaluons maintenant l'aire T du triangle MM_1M_2; elle est égale (n° 11) au demi-produit de la base M_1M_2 par la distance du sommet M à cette base. En appliquant cette règle et appelant x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 les coordonnées des trois sommets, on trouve, par les formules de la Géométrie analytique,

$$2T = \sqrt{\Sigma[(x_1-x)(y_2-y)-(x_2-x)(y_1-y)]^2}.$$

D'autre part, on peut poser

$$x_1 - x = (x'_u + \alpha_1)\Delta u, \quad y_1 - y = (y'_u + \beta_1)\Delta u, \quad z_1 - z = (z'_u + \gamma_1)\Delta u,$$
$$x_2 - x = (x'_v + \alpha_2)\Delta v, \quad y_2 - y = (y'_v + \beta_2)\Delta v, \quad z_2 - z = (z'_v + \gamma_2)\Delta v,$$

les termes α_1, β_1, γ_1 s'évanouissant avec Δu, et α_2, β_2, γ_2 avec Δv. Par suite, il vient

$$2T = \sqrt{[(x'_u+\alpha_1)(y'_v+\beta_2)-(x'_v+\alpha_2)(y'_u+\beta_1)]^2+\ldots}\;\Delta u\,\Delta v,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$2T = \left[\sqrt{(x'_u y'_v - x'_v y'_u)^2 + (y'_u z'_v - y'_v z'_u)^2 + (z'_u x'_v - z'_v x'_u)^2} + \varepsilon\right]\Delta u\,\Delta v,$$

le terme ε s'évanouissant avec Δu et Δv. Mais, d'après nos hypothèses, l'expression qui précède ε sous le radical ne devient nulle en aucun point de la région (R). Elle est d'ailleurs identique (Ch. II, n° 13) au discriminant changé de signe de l'élément linéaire

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

de la surface (S). Si donc nous mettons $2T$ sous la forme

$$2T = \left(\sqrt{EG-F^2}+\eta\right)\Delta u\,\Delta v,$$

le premier terme entre parenthèses restera toujours fini, tandis que η tendra vers zéro en même temps que Δu et Δv.

Pour avoir l'aire T' du triangle $M'M_1M_2$, il faut, dans l'expression de T, remplacer $EG-F^2$ par la valeur que cette fonction acquiert au point M', c'est-à-dire pour les valeurs $u+\Delta u$ et $v+\Delta v$ des paramètres. Par suite de la continuité de x, y, z et de leurs dérivées par rapport à u, v, w, nous pourrons écrire

$$2T' = \left(\sqrt{EG-F^2}+\eta'\right)\Delta u\,\Delta v,$$

le terme η' tendant comme η vers zéro en même temps que les accroissements Δu et Δv.

Soit S la somme de tous les couples de triangles T et T' découpés sur la région (R); nous aurons

$$S = \sum \left(\sqrt{EG - F^2} + \frac{\eta + \eta'}{2} \right) \Delta u \, \Delta v.$$

Désignons maintenant par (C) la région du plan des uv qui correspond à la région (R) et faisons décroître indéfiniment toutes les mailles du réseau considéré. Il suit du théorème I (n° 8) que la somme S devient l'intégrale double

$$(22) \qquad A = \iint_{(C)} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Par définition, *cette intégrale est l'aire de la région* (R).

Sa valeur est indépendante du réseau qu'on emploie, pourvu que ce réseau jouisse des propriétés que nous avons attribuées au réseau (u, v). Soit, en effet, $u_1 = \text{const.}$, $v_1 = \text{const.}$ un autre réseau, donnant pour l'élément linéaire

$$ds^2 = E_1 \, du_1^2 + 2F_1 \, du_1 \, dv_1 + G_1 \, dv_1^2.$$

Si l'on se sert de ce réseau pour définir l'aire de la région (R), on arrivera à l'intégrale double

$$A_1 = \iint_{(C_1)} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \, du_1 \, dv_1,$$

la région (C_1) correspondant à la région (C) précédemment considérée. Mais, d'après une propriété bien connue des déterminants fonctionnels, on aura

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial y}{\partial v_1} - \frac{\partial x}{\partial v_1} \frac{\partial y}{\partial u_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial u_1} \frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial u}{\partial v_1} \frac{\partial v}{\partial u_1} \right)$$

et deux identités analogues, d'où résulte

$$\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \, du_1 \, dv_1 = \sqrt{EG - F^2} \left(\frac{\partial u}{\partial u_1} \frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial u}{\partial v_1} \frac{\partial v}{\partial u_1} \right) du_1 \, dv_1.$$

On voit donc (théorème II du n° 8) que A_1 n'est autre chose que l'intégrale A, exprimée au moyen des variables u_1 et v_1.

17. Ainsi la définition des aires courbes permet d'employer à leur évaluation tel système de coordonnées (u, v) que l'on voudra, pourvu qu'à chaque point du lambeau de surface considéré (R) corresponde un seul point de la région correspondante du plan des uv et réciproquement.

Par exemple, si l'on fait usage des coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z), il faudra qu'à chaque point de la projection (C) de (R) sur le plan des xy corresponde un seul point de cette région; et, si l'on désigne par p, q les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, la formule générale (22) deviendra

$$(23)\qquad A = \int\int_{(C)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Or le radical soumis au signe d'intégration est l'inverse du cosinus de l'angle V que le plan tangent à la surface au point (x, y, z) fait avec le plan des xy, et $dx\,dy$ est l'élément superficiel de ce plan. En se référant à l'énoncé transformé (n° 9) du théorème II du n° 8, on conclut, sous les conditions spécifiées ci-dessus : *Pour évaluer l'aire d'une région* (R), *on peut projeter orthogonalement cette région sur un plan, décomposer en mailles par un réseau curviligne quelconque l'aire projection* (C) *et sommer les aires de toutes ces mailles, divisées chacune par le cosinus de l'angle que fait le plan de projection avec le plan tangent, mené à la surface en un point qui se projette à leur intérieur ou sur leur contour.*

18. C'est le plus souvent en opérant ainsi qu'on arrive, par une décomposition convenable de l'aire projection (C), à simplifier le calcul de l'intégrale (23). Voici un exemple de ce procédé.

Soit à évaluer l'aire de la région (R) que limite, sur le paraboloïde

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0,$$

la courbe le long de laquelle la normale à la surface fait un angle constant ω avec l'axe Oz. Dans le cas présent, l'équation de la surface donne

$$\frac{1}{\cos V} = \sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}.$$

La région (R) se projette donc sur le plan des xy suivant l'ellipse

$$(C) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{\cos^2\omega}-1=\operatorname{tang}^2\omega.$$

Découpons l'aire de cette ellipse (C) en mailles quadrangulaires par une famille d'ellipses similaires

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\operatorname{tang}^2 V,$$

où V variera de zéro à ω et par une autre famille de courbes, qu'il n'est pas nécessaire de définir.

Sommons tous les éléments de l'intégrale

$$A=\int\int_{(C)}\frac{dx\,dy}{\cos V}$$

qui correspondent aux mailles comprises entre deux ellipses voisines V et $V+dV$. Comme $\cos V$ a la même valeur pour toutes ces mailles, il suffit de multiplier son inverse par l'aire comprise entre les deux ellipses. Or l'ellipse V a pour aire totale $\pi ab\operatorname{tang}^2 V$; l'aire annulaire que nous considérons, étant sa différentielle, a pour expression

$$d\pi ab\operatorname{tang}^2 V=2\pi\, ab\,\frac{\sin V}{\cos^3 V}\,dV.$$

La portion de l'intégrale A qui correspond à cette aire est donc

$$2\pi\, ab\,\frac{\sin V}{\cos^4 V}\,dV.$$

En sommant tous les éléments analogues qui correspondent aux valeurs de V comprises entre zéro et ω, on trouve

$$A=2\pi\, ab\int_0^\omega\frac{\sin V}{\cos^4 V}\,dV=\frac{2\pi ab}{3}\left(\frac{1}{\cos^3\omega}-1\right).$$

Telle est l'expression de l'aire cherchée.

19. *Hélicoïdes.* — L'élément superficiel de ces surfaces prend une forme simple quand on fait usage des coordonnées semi-

polaires r, θ, z. Si, en effet, $z = \varphi(r)$ est l'équation du profil de la surface dans son plan, on aura, pour les points de l'hélicoïde,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = \varphi(r) + h\theta.$$

Nous avons formé (Ch. IX, n° 5) les coefficients de l'élément linéaire

$$E = 1 + \varphi'^2, \qquad F = h\varphi', \qquad G = r^2 + h^2.$$

De là résulte l'élément superficiel

$$\sqrt{EG - F^2}\, dr\, d\theta = \sqrt{r^2(1 + \varphi'^2) + h^2}\, dr\, d\theta.$$

On voit que l'aire de l'hélicoïde, limitée par deux cylindres $r = r_0$, $r = R$ et par deux plans $\theta = \theta_0$ et $\theta = \Theta$, aura pour mesure

$$(24)\quad A = \int_{\theta_0}^{\Theta} d\theta \int_{r_0}^{R} \sqrt{r^2(1+\varphi'^2)+h^2}\, dr = (\Theta - \theta_0)\int_{r_0}^{R} \sqrt{r^2(1+\varphi'^2)+h^2}\, dr.$$

Surfaces de révolution. — Si l'on fait $h = 0$ dans la formule précédente, elle se réduit à

$$A = (\Theta - \theta_0)\int_{r_0}^{R} r\sqrt{1 + \varphi'^2}\, dr;$$

en désignant par u l'arc de la méridienne, on pourra écrire

$$(25)\qquad A = (\Theta - \theta_0)\int_{u_0}^{U} r\, du,$$

à la condition que r soit positif entre u_0 et U.

Pour un segment de surface de révolution, la différence $\Theta - \theta_0$ est égale à 2π, en sorte que l'aire devient

$$A = 2\pi \int_{u_0}^{U} r\, du,$$

formule qui permettrait de retrouver les expressions obtenues en Géométrie élémentaire pour l'aire latérale du cylindre, du tronc de cône et de la zone sphérique.

La relation (25) conduit à un énoncé géométrique élégant. Appelons l la longueur de l'arc de méridienne qui engendre le

segment considéré et r_0 la distance du centre de gravité de cet arc à l'axe de révolution. On a, d'après la définition même du centre de gravité,

$$\int_{u_0}^{U} r\,du = r_0 l,$$

de sorte que la formule (25) peut être écrite

$$A = l(\theta - \theta_0) r_0.$$

Ainsi *l'aire engendrée par un arc de courbe plane qui tourne autour d'une droite de son plan et qui ne la rencontre pas est égale au produit de la longueur de cet arc par l'arc que décrit son centre de gravité.* Ce théorème, qui remonte à Pappus, est souvent appelé théorème de Guldin.

Appliquons-le au *tore* engendré par un cercle de rayon a tournant autour d'une droite de son plan, située à la distance b de son centre (on suppose $b > a$). La longueur de la méridienne est $2\pi a$; pour engendrer le tore entier, elle tourne d'un angle égal à 2π; son centre décrit une circonférence dont la longueur est $2\pi b$; par suite, *l'aire totale du tore est égale à* $4\pi^2 ab$.

VIII. — Mesure des volumes; généralités et premiers exemples.

20. La mesure des volumes est liée à la théorie des intégrales triples comme celle des aires à la théorie des intégrales doubles.

On sait que l'intégrale triple d'une fonction F de trois coordonnées x, y, z, étendue à une portion (R) de l'espace, limitée dans tous les sens, est définie d'une façon analogue à l'intégrale double. C'est la somme des volumes des parallélépipèdes rectangles infiniment petits, de même orientation, qu'on peut découper dans le solide (R), multipliés chacun par la valeur que la fonction donnée $F(x, y, z)$ prend en un point arbitrairement choisi à son intérieur ou sur sa surface.

On peut évaluer une intégrale triple par trois intégrations successives, relatives à chacune des variables.

Si l'on substitue aux coordonnées cartésiennes x, y, z, des coordonnées curvilignes u, v, w, liées aux premières ainsi qu'il

a été dit (n° 8, théorème II) pour les espaces à deux dimensions, on aura

$$(26)\quad \iiint_{(R)} F\,dx\,dy\,dz = \iiint_{(R)} F \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix} du\,dv\,dw,$$

la seconde sommation s'étendant à tous les petits parallélépipèdes rectangles de l'espace (u, v, w), intérieurs au solide qui, dans cet espace, correspond au solide (R).

Il résulte, en particulier, de l'équation précédente que la valeur d'une intégrale triple ne dépend pas de l'orientation des parallélépipèdes rectangles qui interviennent dans sa définition.

21. Étant donné un solide (R), limité dans tous les sens par des surfaces planes ou courbes, on le découpe en parallélépipèdes rectangles, ayant tous la même orientation, d'ailleurs quelconque, et l'on somme les volumes de ces solides élémentaires, rendus tous infiniment petits. *L'intégrale triple*

$$(27)\quad V = \iiint_{(R)} dx\,dy\,dz$$

est, par définition, le volume du solide (R).

En raisonnant comme nous l'avons fait au n° 9, on établit que *le volume d'un solide est la somme des volumes des solides élémentaires infiniment petits, à faces courbes, qui y sont découpés par les surfaces d'un système triple quelconque,* sous les conditions sus-visées.

L'évaluation d'un volume est notablement facilitée, quand on peut la ramener à des intégrations simples dans lesquelles la fonction qu'on intègre ne contient que la variable d'intégration. On y arrive souvent par l'emploi de coordonnées curvilignes convenables. Mais, avant d'appliquer ce procédé, nous étudierons deux transformations générales de l'intégrale (27), consistant dans la sommation de ses éléments, soit *par tranches parallèles,* soit *par filets prismatiques.*

22. Si l'on réunit tous les solides élémentaires compris entre les deux plans z et $z + dz$, on devra effectuer d'abord l'intégrale double

$$\iint dx\,dy,$$

étendue à toute la section que le plan z détermine dans le solide proposé. Cette intégrale n'est autre chose que l'aire même $A(z)$ de cette section. On n'aura donc plus qu'à intégrer la différentielle $A(z)\,dz$ entre les valeurs de z qui correspondent aux points extrêmes du solide.

L'application de ce procédé est avantageuse quand le solide proposé est tel que l'on connaît sans calcul l'aire des sections qui y sont faites par une série de plans parallèles.

Tétraèdre. — Prenons pour origine l'un des sommets, pour plan des xy un plan parallèle à la base, et soit h la hauteur correspondant à cette base, dont l'aire sera désignée par B. Celle de la section faite par un plan z étant égale à $Bz^2 : h^2$, nous aurons le volume cherché en multipliant cette aire par dz et intégrant entre les limites zéro et h. On trouve ainsi que *le volume d'un tétraèdre est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.* On ne procède pas autrement en Géométrie élémentaire, pour arriver à ce résultat capital.

Paraboloïde elliptique. — Soit à évaluer le volume du segment que détache du paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$$

le plan mené perpendiculairement à son axe à la distance h du sommet. La section faite par le plan z est une ellipse, d'aire égale à $2\pi\sqrt{ab}\,z$. Multipliant par dz et intégrant entre les limites o et h, nous trouvons

$$V = \pi\sqrt{ab}\,h^2 = \frac{h}{2}\,2\pi\sqrt{ab}\,h.$$

Or $2\pi\sqrt{ab}\,h$ est l'aire de la base du segment. Donc, *le volume du segment est égal au demi-produit de sa base par sa hauteur.*

Théorème. — *Si deux solides sont tels que tout plan parallèle à un plan fixe y détermine deux sections d'aires équivalentes, deux plans quelconques, parallèles à ce plan fixe, en détachent des segments de même volume.*

En effet, si les sections des deux solides par le plan z ont même

aire $A(z)$, les volumes considérés auront la même expression

$$(28) \qquad V = \int_{z_0}^{Z} A(z)\,dz$$

et, par suite, seront égaux.

Ce théorème, qui généralise une propriété fondamentale de la pyramide, permet d'affirmer que, *si trois solides sont tels que tout plan parallèle à un plan fixe détermine dans le premier une section d'aire équivalente à la somme ou à la différence des aires des sections qu'il détermine dans les deux autres, deux plans quelconques, parallèles à ce plan fixe, détachent du premier solide un segment dont le volume est égal à la somme ou à la différence des volumes des segments qu'ils détachent des deux autres solides*. Les quadriques à centre vont nous fournir un exemple de cette règle.

Considérons d'abord l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

le cylindre circonscrit parallèlement à l'axe des z, et le cône

$$(29) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

qui a pour sommet le centre de l'ellipsoïde, et pour directrice la section du cylindre précédent par le plan tangent mené à l'ellipsoïde en l'un des sommets situés sur l'axe des z. Tout plan z coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse dont l'aire

$$\pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) = \pi ab - \pi ab\frac{z^2}{c^2}$$

est la différence des aires des ellipses suivant lesquelles il coupe le cylindre circonscrit et le cône considéré. Donc, *deux plans parallèles au plan des xy détachent de l'ellipsoïde un segment dont le volume est égal à la différence de ceux des segments qu'ils détachent du cylindre circonscrit parallèlement à l'axe des z et du cône* (29).

En raisonnant de même pour les hyperboloïdes, on arrive aux résultats suivants : *Étant donnés un hyperboloïde à une nappe,*

son cône asymptote et le cylindre qui lui est circonscrit parallèlement à son axe non transverse, deux plans perpendiculaires à l'axe non transverse détachent de l'hyperboloïde, du cône et du cylindre des segments dont le premier a un volume égal à l'excès du volume du second sur celui du troisième. Pour l'hyperboloïde à deux nappes et les segments qu'en détachent des plans perpendiculaires à son axe transverse, on considérera, avec le cône asymptote, le cylindre circonscrit à l'*hyperboloïde conjugué, parallèlement à l'axe non transverse de ce dernier.* Le volume détaché de l'hyperboloïde à deux nappes est la différence entre le volume détaché du cône et le volume détaché du cylindre.

On verrait d'ailleurs aisément que les énoncés précédents s'étendent aux segments détachés des quadriques à centre par des plans parallèles à un plan diamétral.

23. Revenons à l'intégrale (27) pour sommer ses éléments par *filets prismatiques,* c'est-à-dire en réunissant tous ceux que traverse une parallèle à l'axe des z. Ce mode de groupement est le plus naturel, quand le solide proposé est un tronc de cylindre fermé à base courbe, dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z. Le plan de l'une des bases étant pris pour plan des xy, soit $z = f(x, y)$ l'équation de la surface qui forme l'autre base ; la fonction f n'a qu'une valeur en chaque point (x, y) intérieur à la section droite, et conserve dans toute cette région un signe invariable, qu'on peut supposer être le signe *plus*. L'intégration, étant étendue à tous les éléments de volume qui ont une arête dirigée suivant la perpendiculaire au plan des xy au point (x, y) donne, pour volume du filet prismatique,

$$dx\,dy \int_0^z dz = z\,dx\,dy.$$

Il reste à sommer tous les filets qui reposent sur la base plane du cylindre, ce qui donne

$$V = \int\int_{(B)} z\,dx\,dy, \tag{30}$$

l'intégrale double s'étendant à toute l'aire (B) de cette section

droite. On pourra d'ailleurs, pour l'évaluer, employer tel système de coordonnées curvilignes qui conviendra.

Si la surface $z = f(x, y)$ est un plan, le centre de gravité de cette base est en un point dont la coordonnée z_0 est définie par la relation

$$z_0 \int\int_{(B)} \frac{dx\,dy}{\cos\lambda} = \int\int_{(B)} \frac{z\,dx\,dy}{\cos\lambda},$$

où λ désigne l'angle des deux bases. On a, d'après cela, $V = Bz_0$, en désignant par B l'aire de la base située dans le plan des xy. Ainsi, *le volume d'un tronc de cylindre à bases planes est égal au produit de l'une des bases par la distance du centre de gravité de la seconde base au plan de la première.* Cet énoncé n'exige pas que le tronc de cylindre soit droit. On remarquera que le résultat est indépendant de l'orientation mutuelle des deux plans de base; il faut seulement que chacun d'eux rencontre toutes les génératrices.

La sommation par filets prismatiques s'applique à un tronc de cylindre fermé, ayant ses génératrices parallèles à Oz, et pour bases des portions de deux surfaces

$$z_1 = f_1(x, y), \qquad z_2 = f_2(x, y).$$

Si les deux fonctions f_1 et f_2 ont une seule valeur en tout point (x, y) intérieur à la section droite du cylindre, et si la différence $f_2 - f_1$ reste positive dans toute cette région, il suffira de décomposer le solide en deux troncs, ayant chacun comme base une section droite (B), pour voir que son volume est représenté par l'intégrale double

$$(30)' \qquad V = \int\int_{(B)} (z_2 - z_1)\,dx\,dy.$$

Cette remarque permet d'exprimer par une intégrale double le volume compris sous une surface fermée que toute parallèle à l'axe Oz rencontre en deux points seulement. Il suffit, en effet, dans l'intégrale (30)' d'entendre par (B) la section droite du cylindre circonscrit parallèlement à l'axe Oz et par z_1, z_2 les z des deux points où la surface est rencontrée par la perpendiculaire élevée sur le plan des xy en un point (x, y) de la base (B).

IX. — Volumes en coordonnées curvilignes.

24. Nous allons, en vue des applications, calculer, en coordonnées semi-polaires et en coordonnées polaires, l'expression qui est soumise au signe d'intégration dans le second membre de la formule fondamentale (26), particularisée par l'hypothèse $F = 1$. Nous avons ainsi

$$\iiint_{(R)} dx\, dy\, dz = \iiint_{(R)} J\, du\, dv\, dw,$$

en désignant par J le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix}$$

de x, y, z par rapport aux nouvelles variables u, v, w.

Dans le passage au système semi-polaire, la coordonnée z ne changeant pas, J se réduit au déterminant fonctionnel de x, y par rapport à r et θ, qui a été calculé déjà (nº **13**) et trouvé égal à r. On a donc

$$(31) \qquad J\, dr\, dz\, d\theta = r\, dr\, dz\, d\theta.$$

Pour les coordonnées polaires ρ, ψ, θ les relations (6) donnent

$$(32) \qquad J\, d\rho\, d\psi\, d\theta = \rho^2 \sin\psi\, d\rho\, d\psi\, d\theta.$$

On arrive sans calcul à ce résultat en profitant de la transformation précédente et remplaçant, dans chaque plan $\theta = \text{const.}$, les coordonnées rectangulaires z, r par les coordonnées polaires ρ, ψ, ce qui conduit à écrire $\rho \sin\psi$ et $\rho\, d\rho\, d\psi$ au lieu de r et de $dr\, dz$.

Nous allons faire immédiatement une application de ce dernier résultat. Ayant

$$(32)' \qquad V = \iiint_{(R)} dx\, dy\, dz = \iiint_{(R)} \rho^2 \sin\psi\, d\rho\, d\psi\, d\theta,$$

nous supposerons que la région (R) soit limitée par une surface qui ne peut être rencontrée en plus de deux points par une droite.

A chaque couple (ψ, θ) correspondra une seule valeur de ρ, et nous pourrons effectuer une première intégration par rapport à ρ, ce qui donnera

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int \rho^3 \sin\psi \, d\psi,$$

l'intégrale relative à ψ s'étendant à toute l'aire d'une section $\theta = \text{const}$. Si l'origine des coordonnées est à l'intérieur de la surface, ψ variera de o à π. Si l'origine est un point de la surface, l'une des limites de ψ sera o ou π (suivant la direction choisie pour Oz); l'autre sera, en général, variable avec θ.

Comme exemple, considérons une surface quelconque, dont les deux rayons de courbure principaux soient positifs en un point simple O pris pour origine; si l'on prend pour plan des xy le plan tangent en O, pour plans des zx et des zy les plans des sections principales relatives à ce point, et qu'on cherche le lieu des centres de courbure, relatifs au point O, de toutes les sections planes de la surface qui passent en ce point, on verra facilement, à l'aide du théorème de Meusnier et de la relation d'Euler (Ch. VII, n°s 1 et 3), que la surface cherchée a pour équation

$$(R_1 x^2 + R_2 y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - R_1 R_2 z (x^2 + y^2) = 0.$$

C'est une surface fermée, admettant l'axe Oz comme droite double et tangente à l'origine au plan des xy. Pour trouver le volume V qu'elle limite, nous emploierons son équation en coordonnées polaires, qui est fort simple,

$$\rho = \frac{R_1 R_2 \cos\psi}{R_1 \cos^2\theta + R_2 \sin^2\theta}.$$

Quel que soit θ, les valeurs limites de ψ sont $\frac{\pi}{2}$ et o. On a donc

$$V = \frac{(R_1 R_2)^3}{3}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(R_1 \cos^2\theta + R_2 \sin^2\theta)^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^3\psi \sin\psi \, d\psi.$$

L'intégrale relative à ψ est égale à $\frac{1}{4}$. Faisant le changement de variable $\operatorname{tang}\theta = t$, on aura

$$V = \frac{(R_1 R_2)^3}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + t^2)^2 \, dt}{(R_1 + R_2 t^2)^3}.$$

Il n'y a plus maintenant qu'à effectuer l'intégration indiquée. On trouve ainsi, tous calculs faits,

$$V = \frac{\pi\sqrt{R_1 R_2}}{48}(3R_1^2 + 2R_1R_2 + 3R_2^2).$$

Telle est l'expression du volume cherché.

25. Voici quelques conséquences de la formule (31) relative aux coordonnées semi-polaires. Le volume d'un solide (R) étant

$$(31)' \qquad V = \iiint_{(R)} dx\,dy\,dz = \iiint_{(R)} r\,dr\,dz\,d\theta,$$

le coin limité par deux plans $\theta = \theta_0$ et $\theta = \Theta$, le cylindre $r = a$, le plan $z = 0$ et une surface $z = f(r, \theta)$ aura pour volume

$$V = \int_{\theta_0}^{\Theta} d\theta \int_0^a r f(r, \theta)\,dr.$$

Appliquée à l'hélicoïde à plan directeur $z = h\theta$, cette formule donne

$$V = \frac{ha^2}{2}(\Theta - \theta_0).$$

Elle convient d'ailleurs à un hélicoïde quelconque $z = \varphi(r) + h\theta$, pourvu que la fonction φ n'ait qu'une valeur entre $r = 0$ et $r = a$. Il suffit d'intégrer la fonction $r\varphi(r)$.

Servons-nous maintenant de la relation (31)′ pour évaluer le volume compris entre une surface de révolution autour de Oz, deux de ses méridiens $\theta = \theta_0$, $\theta = \Theta$ et deux de ses parallèles $z = z_0$, $z = Z$. Ce volume est

$$(33) \qquad V = \int_{\theta_0}^{\Theta} d\theta \iint r\,dr\,dz = \frac{\Theta - \theta_0}{2}\int_{z_0}^{Z} (r_2^2 - r_1^2)\,dz,$$

si l'on suppose que tout parallèle rencontre la méridienne en deux points seulement, aux distances r_1 et r_2 de l'axe ($r_2 > r_1$) et d'un même côté de cet axe. On voit qu'il n'y a plus qu'à effectuer une quadrature en tenant compte des deux expressions

$$r_1 = \varphi_1(z), \qquad r_2 = \varphi_2(z),$$

qui seront connues quand on connaîtra la méridienne.

Le trapèze (A), que les plans $z = z_0$, $z = Z$ détachent du plan de la méridienne et dont celle-ci forme les deux côtés (l'un peut d'ailleurs être l'axe lui-même, $r_1 = 0$), a un centre de gravité dont la distance r_0 à l'axe est définie par la relation

$$r_0 \int\int_{(A)} dr\,dz = \int\int_{(A)} r\,dr\,dz.$$

En conséquence, l'équation (33) s'écrit

$$V = A r_0 (\theta - \theta_0),$$

si l'on représente par A l'aire du trapèze générateur de la surface; on voit que le facteur qui multiplie A est la longueur de l'arc de cercle décrit par le centre de gravité. De là, par une généralisation facile, on tire cette conclusion :

Quand un contour plan fermé tourne autour d'une droite située dans son plan, mais ne le rencontrant pas, le volume qu'il engendre est égal au produit de l'aire comprise sous ce contour par la longueur de l'arc de cercle que décrit son centre de gravité.

Ce théorème, souvent attribué à Guldin, était connu de Pappus. Si on l'applique au tore engendré par un cercle de rayon a, tournant autour d'une droite de son plan, située à une distance b de son centre, on voit que le volume total enfermé par cette surface est égal à $2\pi^2 a^2 b$, pourvu que a soit inférieur à b.

FIN.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de :*	*Lisez :*
9	4	$\alpha_2(y - y_0)$	$\alpha_2(x - x_0)$
9	10	voisinè	voisins
11	équations (v)	$\frac{z}{b}$	$\frac{z}{c}$
18	5	$Z - c$	$Z - z$
19	6	(2)	qui précède (2)
50	3	$F(x, y, z)$	$F(x, y, \tau)$
68	équations (12)	$Az' - Cx'$	$Ay' - Bx'$
76	18	$2\beta(\alpha + 1)$	$2\beta(\alpha + 1)x$
90	équations (III)	$-\frac{\beta'}{T}, \ldots, -\frac{\gamma'}{T}$	$-\frac{\beta''}{T}, \ldots, -\frac{\gamma''}{T}$
105	dernière	et la torsion	et de torsion
119	12	$\varphi(y)$	$\varphi(x)$
119	15	$\varphi_0(x_0)$	$\varphi(x_0)$
127	9	(C)	(C_1)
128	4 et 7	ds	ds_1
178	4	$m = z'_u x'_v - z'_u x'_v$	$m = z'_u x'_v - x'_u z'_v$
178	4	$n = x'_u y'_v - y'_v x'_v$	$n = x'_u y'_v - y'_u x'_v$

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE IV.

COURBURE ET TORSION. — PROPRIÉTÉS DE COURBURE DES COURBES PLANES.

CHAPITRE V.

FORMULES FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES COURBES. APPLICATIONS DIVERSES.

CHAPITRE VI.

CONTACTS DES COURBES ET DES SURFACES.

CHAPITRE VII.

COURBURE DES LIGNES TRACÉES SUR LES SURFACES.

CHAPITRE VIII.

DIRECTIONS CONJUGUÉES. — LIGNES ASYMPTOTIQUES. — LIGNES DE COURBURE.

CHAPITRE IX.

SECTIONS PRINCIPALES, LIGNES ASYMPTOTIQUES ET LIGNES DE COURBURE EN COORDONNÉES CURVILIGNES.

CHAPITRE X.

ÉTUDE DES SURFACES RÉGLÉES.

CHAPITRE XI.

ARCS, AIRES ET VOLUMES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

23540 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

